

# Übungsblatt 1

## Aufgabe 1

Zeichnen Sie jeweils den Syntaxbaum zu folgenden Formeln  $F$ . Berechnen Sie anschließend jeweils den Wert  $\mathcal{B}(F)$  für die gegebenen Formeln  $F$  und Belegungen  $\mathcal{B}$ .

(a)  $F = (\neg(A \wedge (B \vee C)) \wedge (B \vee \neg C))$        $\mathcal{B}: A \mapsto 1, B \mapsto 0, C \mapsto 0$

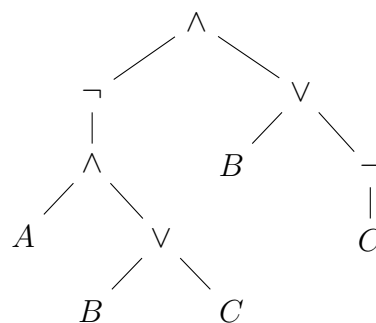
(b)  $F = ((\neg B \wedge \neg C) \leftrightarrow ((A \rightarrow \neg B) \rightarrow C))$        $\mathcal{B}: A \mapsto 1, B \mapsto 0, C \mapsto 1$

(c)  $F = ((A \vee (B \leftrightarrow \neg C)) \rightarrow \neg(A \vee B))$        $\mathcal{B}: A \mapsto 0, B \mapsto 1, C \mapsto 1$

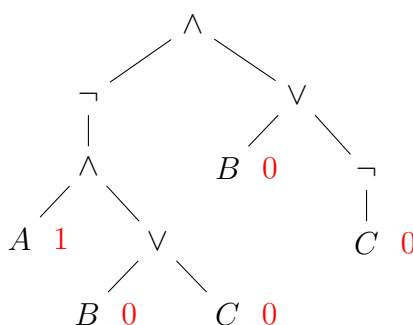
## Lösung

Die erste Teilaufgabe wird ausführlich beschrieben. Die weiteren zwei kürzen wir ab und zeigen nur das Endergebnis.

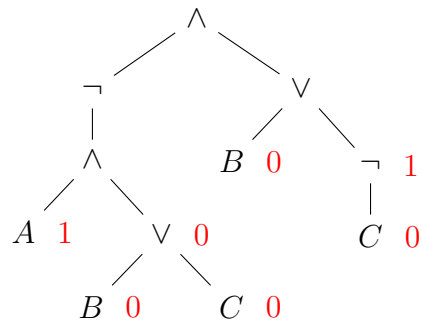
(a) Der Syntaxbaum für  $F$  ist:



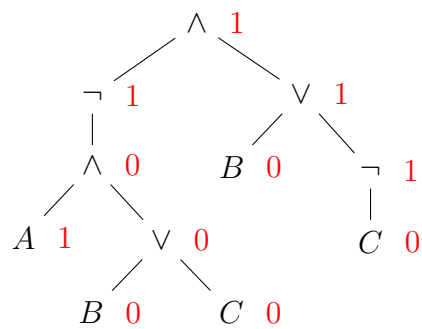
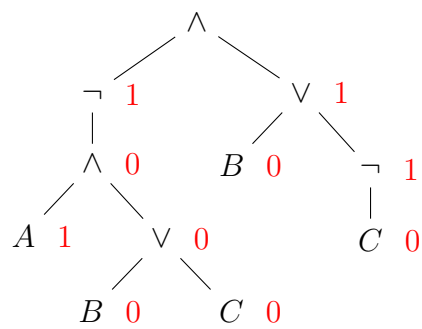
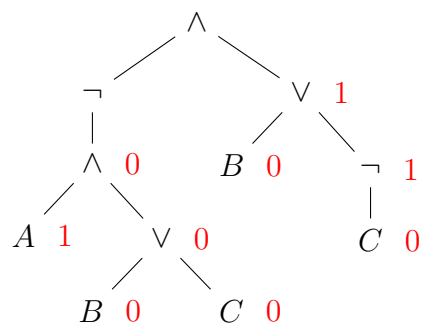
Wir beschriften diesen nun bottom-up mit den Werten für die jeweiligen Teilformeln. Für die Blätter verwenden wir die Werte von  $\mathcal{B}$ :



Wir können in jedem weiteren Schritt alle Knoten beschriften, deren Kinder beschriftet sind. Im nächsten Schritt erhalten wir also:

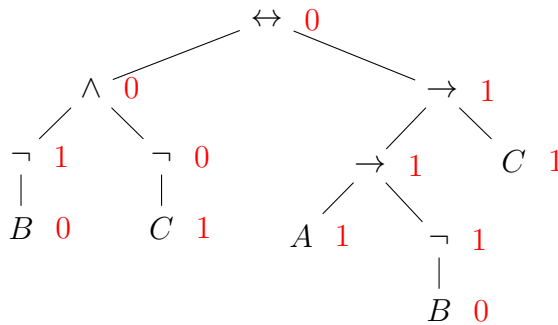


Die weiteren Schritte sind

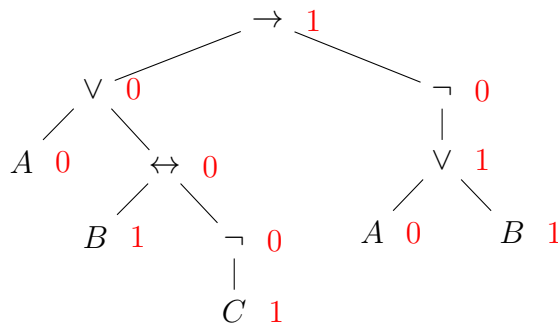


Der Wert ist also  $\mathcal{B}(F) = 1$ .

(b) Es gilt  $\mathcal{B}(F) = 0$ , denn:



(c) Es gilt  $\mathcal{B}(F) = 1$ , denn:



## Aufgabe 2

Ein Gerät besitzt vier Lämpchen  $L_1, \dots, L_4$ , die entweder grün oder rot leuchten können. Das Gerät arbeitet korrekt, wenn die folgenden Eigenschaften erfüllt sind:

1.  $L_1$  leuchtet grün.
2. Wenn  $L_1$  oder  $L_2$  grün leuchtet, dann leuchtet auch  $L_4$  grün.
3. Mindestens eins der Lämpchen leuchtet rot.
4.  $L_3$  leuchtet rot, wenn  $L_1$  und  $L_2$  in verschiedenen Farben leuchten.

Formalisieren Sie die Spezifikation des Gerätes durch eine aussagenlogische Formel. Geben Sie die gesamte Wahrheitstafel für Ihre Formel an. Ist die Formel erfüllbar?

## Lösung

Jede Lampe  $L_1, \dots, L_4$  sehen wir als atomare Formel an. Dabei soll  $\mathcal{B}(L_i) = 1$  bedeuten,

dass Lampe  $i$  grün leuchtet, bzw.  $\mathcal{B}(L_i) = 0$ , dass Lampe  $i$  rot leuchtet. Wir erhalten also folgende Formeln  $F_1, \dots, F_4$ , wobei die gesamte Formel dann  $F = (F_1 \wedge F_2 \wedge F_3 \wedge F_4)$  ist:

$$F_1 = L_1$$

$$F_2 = ((L_1 \vee L_2) \rightarrow L_4)$$

$$F_3 = (\neg L_1 \vee \neg L_2 \vee \neg L_3 \vee \neg L_4)$$

$$F_4 = (\neg(L_1 \leftrightarrow L_2) \rightarrow \neg L_3)$$

Wahrheitstafel für  $F$ :

$L_1$	$L_2$	$L_3$	$L_4$	$F$
0	0	0	0	0
0	0	0	1	0
0	0	1	0	0
0	0	1	1	0
0	1	0	0	0
0	1	0	1	0
0	1	1	0	0
0	1	1	1	0
1	0	0	0	0
1	0	0	1	1
1	0	1	0	0
1	0	1	1	0
1	1	0	0	0
1	1	0	1	1
1	1	1	0	0
1	1	1	1	0

Diese Tabelle kann man erhalten, indem man einfach für jede der 16 Belegungen den Wert für  $F$  ausrechnet. Ein besseres Vorgehen ist hier wie folgt: Da  $F = (F_1 \wedge F_2 \wedge F_3 \wedge F_4)$ , schauen wir, in welchen Fällen sich  $F_1$ ,  $F_2$ ,  $F_3$  und  $F_4$  einzeln zu 0 auswerten. Denn es gilt, dass  $\mathcal{B}(F) = 0$  genau dann, wenn  $\mathcal{B}(F_1) = 0$  oder  $\mathcal{B}(F_2) = 0$  oder  $\mathcal{B}(F_3) = 0$  oder  $\mathcal{B}(F_4) = 0$ . Wir beginnen mit  $F_1$  und tragen überall, wo  $\mathcal{B}(L_1) = 0$  gilt, eine 0 ein. Dies ist die obere Hälfte der Tabelle, die wir im Weiteren ignorieren werden. Wir müssen also noch folgende Tabelle ausfüllen:

$L_1$	$L_2$	$L_3$	$L_4$	$F$
1	0	0	0	
1	0	0	1	
1	0	1	0	
1	0	1	1	
1	1	0	0	
1	1	0	1	
1	1	1	0	
1	1	1	1	

Es gilt  $\mathcal{B}(F_2) = 0$  genau dann, wenn  $\mathcal{B}(L_1 \vee L_2) = 1$  und  $\mathcal{B}(L_4) = 0$ . Wegen  $\mathcal{B}(L_1) = 1$  ist also  $\mathcal{B}(F_2) = 0$  genau dann, wenn  $\mathcal{B}(L_4) = 0$ . Damit erhalten wir:

$L_1$	$L_2$	$L_3$	$L_4$	$F$
1	0	0	0	0
1	0	0	1	
1	0	1	0	0
1	0	1	1	
1	1	0	0	0
1	1	0	1	
1	1	1	0	0
1	1	1	1	

$\mathcal{B}(F_3) = 0$  gilt nur für die Belegung  $\mathcal{B}$  mit  $\mathcal{B}(L_i) = 1$  für alle  $1 \leq i \leq 4$ . Wir erhalten also:

$L_1$	$L_2$	$L_3$	$L_4$	$F$
1	0	0	0	0
1	0	0	1	
1	0	1	0	0
1	0	1	1	
1	1	0	0	0
1	1	0	1	
1	1	1	0	0
1	1	1	1	0

Es gilt  $\mathcal{B}(F_4) = 0$  genau dann, wenn  $\mathcal{B}(L_3) = 1$  und  $\mathcal{B}(L_1) \neq \mathcal{B}(L_2)$ . Bei den restlichen drei Einträgen gilt dies nur für die Belegung  $\mathcal{B}: L_1 \rightarrow 1, L_2 \rightarrow 0, L_3 \rightarrow 1, L_4 \rightarrow 1$ . Somit erhalten wir:

$L_1$	$L_2$	$L_3$	$L_4$	$F$
1	0	0	0	0
1	0	0	1	
1	0	1	0	0
1	0	1	1	0
1	1	0	0	0
1	1	0	1	
1	1	1	0	0
1	1	1	1	0

In den übrigen zwei Fällen muss sich die Formel also zu 1 auswerten.

Die Formel ist erfüllbar, weil es Belegungen gibt, unter denen sich die Formel zu 1 auswertet.

### Aufgabe 3

Bestimmen Sie jeweils  $\widehat{\mathcal{B}}$  für die folgenden abkürzenden Formeln:

(a)  $(F_1 \rightarrow F_2)$

**Lösung**

$(F_1 \rightarrow F_2)$  ist eine Abkürzung für  $(\neg F_1 \vee F_2)$ . Wir erhalten also

$$\widehat{\mathcal{B}}(F_1 \rightarrow F_2) = \begin{cases} 0, & \text{falls } \widehat{\mathcal{B}}(F_1) = 1 \text{ und } \widehat{\mathcal{B}}(F_2) = 0, \\ 1, & \text{sonst.} \end{cases}$$

(b)  $(F_1 \leftrightarrow F_2)$

**Lösung**

$(F_1 \leftrightarrow F_2)$  ist eine Abkürzung für  $((F_1 \wedge F_2) \vee (\neg F_1 \wedge \neg F_2))$ . Wir erhalten also

$$\widehat{\mathcal{B}}(F_1 \leftrightarrow F_2) = \begin{cases} 1, & \text{falls } \widehat{\mathcal{B}}(F_1) = \widehat{\mathcal{B}}(F_2), \\ 0, & \text{falls } \widehat{\mathcal{B}}(F_1) \neq \widehat{\mathcal{B}}(F_2). \end{cases}$$