

Übungsblatt 3

Aufgabe 1

Zeigen Sie folgende Aussagen für beliebige Formeln F, G :

- (a) $F \models G$ genau dann, wenn $(F \rightarrow G)$ gültig ist.

Lösung

Gelte $F \models G$ und sei \mathcal{B} eine zu F und G passende Belegung. Wegen $F \models G$ folgt aus $\mathcal{B} \models F$, dass $\mathcal{B} \models G$. Somit kann der Fall, dass $\mathcal{B} \models F$, aber $\mathcal{B} \not\models G$ nicht eintreten, also gilt auch $\mathcal{B} \models (F \rightarrow G)$. Damit ist $(F \rightarrow G)$ gültig.

Wenn $(F \rightarrow G)$ gültig ist, dann gilt für jede zu F und G passende Belegung \mathcal{B} , dass $\mathcal{B} \models (F \rightarrow G)$. Aus $\mathcal{B} \models F$ folgt damit auch $\mathcal{B} \models G$, also $F \models G$.

- (b) $F \equiv G$ genau dann, wenn $(F \leftrightarrow G)$ gültig ist.

Lösung

Gelte $F \equiv G$. Dann gilt für jede zu F und G passende Belegung \mathcal{B} , dass $\mathcal{B}(F) = \mathcal{B}(G)$. Daraus folgt, dass $\mathcal{B} \models (F \leftrightarrow G)$, also ist $(F \leftrightarrow G)$ gültig.

Wenn $(F \leftrightarrow G)$ gültig ist, dann gilt für jede zu F und G passende Belegung \mathcal{B} , dass $\mathcal{B} \models (F \leftrightarrow G)$, also $\mathcal{B}(F) = \mathcal{B}(G)$. Daraus folgt, dass $F \equiv G$.

- (c) $F \equiv G$ genau dann, wenn $F \models G$ und $G \models F$.

Lösung

Gelte $F \equiv G$. Dann gilt für jede zu F und G passende Belegung \mathcal{B} , dass $\mathcal{B}(F) = \mathcal{B}(G)$. Aus $\mathcal{B} \models F$ folgt somit $\mathcal{B} \models G$, also gilt $F \models G$. Umgekehrt folgt auch aus $\mathcal{B} \models G$, dass $\mathcal{B} \models F$, also gilt $G \models F$.

Gelte nun $F \models G$ und $G \models F$. Sei \mathcal{B} eine zu F und G passende Belegung. Wenn $\mathcal{B} \models F$, so gilt wegen $F \models G$ auch $\mathcal{B} \models G$. Gelte nun $\mathcal{B} \not\models F$. Wenn $\mathcal{B} \models G$, so erhalten wir wegen $G \models F$ einen Widerspruch. Also kann nur $\mathcal{B} \not\models G$ gelten. Insgesamt gilt $\mathcal{B}(F) = \mathcal{B}(G)$, also $F \equiv G$.

Alternativ: Zeige $(F \leftrightarrow G) \equiv (F \rightarrow G) \wedge (G \rightarrow F)$ und nutze (a)+(b).

- (d) $F \equiv \neg\neg F$

Lösung

Sei \mathcal{B} eine beliebige zu F passende Belegung. Es gilt $\mathcal{B} \models F$ genau dann, wenn $\mathcal{B} \not\models \neg F$, was genau dann gilt, wenn $\mathcal{B} \models \neg\neg F$. Also gilt $F \equiv \neg\neg F$.

(e) $\neg(F \wedge G) \equiv (\neg F \vee \neg G)$

Lösung

Sei \mathcal{B} eine beliebige zu F und G passende Belegung. Es gilt $\mathcal{B} \models \neg(F \wedge G)$ genau dann, wenn $\mathcal{B} \not\models (F \wedge G)$. Dies gilt genau dann, wenn $\mathcal{B} \not\models F$ oder $\mathcal{B} \not\models G$. Dies wiederum gilt genau dann, wenn $\mathcal{B} \models \neg F$ oder $\mathcal{B} \models \neg G$, was genau dann gilt, wenn $\mathcal{B} \models (\neg F \vee \neg G)$. Daraus folgt, dass $\neg(F \wedge G) \equiv (\neg F \vee \neg G)$.

(f) Wenn F gültig ist, dann gilt $(F \vee G) \equiv F$.

Lösung

Sei F gültig und sei \mathcal{B} eine beliebige zu F und G passende Belegung. Aus $\mathcal{B} \models F$ folgt $\mathcal{B} \models (F \vee G)$, also $F \models (F \vee G)$. Gelte nun $\mathcal{B} \models (F \vee G)$. Da F gültig ist, gilt auch $\mathcal{B} \models F$, also $(F \vee G) \models F$. Insgesamt gilt also, dass $(F \vee G) \equiv F$ (siehe (c)).

Aufgabe 2

Seien F_1, F_2 und F_3 Formeln mit folgenden Wahrheitstafeln:

A	B	C	F_1	F_2	F_3
0	0	0	1	0	0
0	0	1	0	0	1
0	1	0	1	1	1
0	1	1	0	1	1
1	0	0	1	0	1
1	0	1	0	0	1
1	1	0	1	1	1
1	1	1	1	0	0

Geben Sie $\text{DNF}(F_i)$ und $\text{KNF}(F_i)$ für $i \in \{1, 2, 3\}$ an. Verwenden Sie hierzu die Definition von Folie 70.

Lösung

Wir lassen im Folgenden die Klammern für \wedge und \vee , die nebeneinander stehen, weg.

$$\text{DNF}(F_1) = ((\neg A \wedge \neg B \wedge \neg C) \vee (\neg A \wedge B \wedge \neg C) \vee (A \wedge \neg B \wedge \neg C) \vee (A \wedge B \wedge \neg C) \vee (A \wedge B \wedge C))$$

$$\text{KNF}(F_1) = ((A \vee B \vee \neg C) \wedge (A \vee \neg B \vee \neg C) \wedge (\neg A \vee B \vee \neg C))$$

$$\text{DNF}(F_2) = ((\neg A \wedge B \wedge \neg C) \vee (\neg A \wedge B \wedge C) \vee (A \wedge B \wedge \neg C))$$

$$\text{KNF}(F_2) = ((A \vee B \vee C) \wedge (A \vee B \vee \neg C) \wedge (\neg A \vee B \vee C) \wedge (\neg A \vee B \vee \neg C) \wedge (\neg A \vee \neg B \vee \neg C))$$

$$\text{DNF}(F_3) = ((\neg A \wedge \neg B \wedge C) \vee (\neg A \wedge B \wedge \neg C) \vee (\neg A \wedge B \wedge C) \vee (A \wedge \neg B \wedge \neg C) \vee (A \wedge \neg B \wedge C) \vee (A \wedge B \wedge \neg C))$$

$$\text{KNF}(F_3) = ((A \vee B \vee C) \wedge (\neg A \vee \neg B \vee \neg C))$$

Aufgabe 3

Sei $F = ((\neg A \rightarrow B) \vee \neg(A \vee \neg C))$. Formen Sie F in KNF um, indem Sie die Regeln auf Folie 75 verwenden.

Lösung

Um die Regeln auf Folie 75 anwenden zu können, müssen wir zunächst F in eine Form bringen, die nur \wedge , \vee und \neg verwendet (siehe Folie 34):

$$F = ((\neg\neg A \vee B) \vee \neg(A \vee \neg C))$$

Anwenden der Regeln für \neg :

$$\begin{aligned} F &= ((\neg\neg A \vee B) \vee \neg(A \vee \neg C)) \\ &\equiv ((A \vee B) \vee \neg(A \vee \neg C)) \\ &\equiv ((A \vee B) \vee (\neg A \wedge \neg\neg C)) \\ &\equiv ((A \vee B) \vee (\neg A \wedge C)) \end{aligned}$$

Anwenden der Regeln für \vee :

$$\begin{aligned} F &\equiv ((A \vee B) \vee (\neg A \wedge C)) \\ &\equiv (((A \vee B) \vee \neg A) \wedge ((A \vee B) \vee C)) \end{aligned}$$

Aufgabe 4

Was müssen Sie an den Regeln auf Folie 75 ändern, damit eine zu F äquivalente DNF konstruiert wird?

Lösung

Man muss bloß in Punkt 2 die \wedge und \vee vertauschen, also:

$$\begin{aligned} (F \wedge (G \vee H)) &\rightsquigarrow ((F \wedge G) \vee (F \wedge H)) \\ ((F \vee G) \wedge H) &\rightsquigarrow ((F \wedge H) \vee (G \wedge H)) \end{aligned}$$