Universität Siegen
Lehrstuhl Theoretische Informatik
Markus Lohrey

Übungsblatt 4

Aufgabe 1

Beantworten Sie folgende Fragen durch Anwenden des Markierungsalgorithmus. (Hinweis: Wir lassen einige der Klammern zwecks besserer Lesbarkeit weg.)

(a) Welche der folgenden Formeln sind erfüllbar?

(1) $(\neg A \vee \neg B \vee C) \wedge \neg C \wedge A \wedge D \wedge (\neg D \vee B)$

(2) $(C \vee \neg A) \wedge (\neg A \vee D \vee \neg B \vee \neg C) \wedge (\neg A \vee B) \wedge (\neg D \vee \neg E \vee F) \wedge A \wedge \neg F$

(b) Welche der folgenden Formeln sind gültig?

(1) $(\neg B \wedge C) \vee C \vee (A \wedge \neg B) \vee (\neg A \wedge B) \vee \neg A$

(2) $(A \wedge D \wedge \neg I) \vee (B \wedge \neg D \wedge E) \vee (\neg A \wedge B \wedge C \wedge H) \vee (\neg E \wedge F) \vee (\neg C \wedge F) \vee (G \wedge \neg H) \vee \neg B \vee \neg F \vee \neg G \vee I$

(c) Welche der folgenden Aussagen sind wahr?

(1) $\neg C \vee \neg D \vee E,\ A,\ \neg A \vee C \vee \neg B \models E \vee \neg B$

(2) $A \vee \neg B \vee \neg D,\ \neg B \vee \neg G \vee F,\ \neg A \vee E \vee \neg C \vee \neg F,\ B,\ D \models E \vee \neg G \vee (\neg C \wedge D)$

Aufgabe 2

Seien $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2 \colon \{A_1, \ldots, A_n\} \to \{0,1\}$ zwei Belegungen. Wir schreiben $\mathcal{B}_1 \leq \mathcal{B}_2$ genau dann, wenn für alle $A \in \{A_1, \ldots, A_n\}$ gilt: Wenn $\mathcal{B}_1(A) = 1$, dann auch $\mathcal{B}_2(A) = 1$. Außerdem sei $\inf(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2) \colon \{A_1, \ldots, A_n\} \to \{0,1\}$ definiert als

$$\inf(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2)(A) = \begin{cases} 1, & \text{falls } \mathcal{B}_1(A) = 1 \text{ und } \mathcal{B}_2(A) = 1, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Sei F eine Formel über den atomaren Formeln $\{A_1, \ldots, A_n\}$. Wir nennen ein Modell $\mathcal{B} \colon \{A_1, \ldots, A_n\} \to \{0,1\}$ für F *kleinstes Modell für F*, wenn für alle anderen Modelle $\mathcal{B}' \colon \{A_1, \ldots, A_n\} \to \{0,1\}$ für F gilt, dass $\mathcal{B} \leq \mathcal{B}'$.

(a) Zeigen Sie, dass $\inf(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2) \leq \mathcal{B}_1$ und $\inf(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2) \leq \mathcal{B}_2$ für zwei beliebige Belegungen $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2 \colon \{A_1, \ldots, A_n\} \to \{0,1\}$.

(b) Sei F eine Hornformel mit atomaren Formeln $\{A_1, \ldots, A_n\}$. Zeigen Sie, dass für alle $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2 \colon \{A_1, \ldots, A_n\} \to \{0,1\}$ gilt: Wenn $\mathcal{B}_1 \models F$ und $\mathcal{B}_2 \models F$, dann gilt auch $\inf(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2) \models F$.

(c) Geben Sie eine Formel an, zu der keine äquivalente Hornformel existiert.

(d) Zeigen Sie, dass jede erfüllbare Hornformel F ein kleinstes Modell besitzt.

(e) Ändern Sie den Markierungsalgorithmus aus der Vorlesung so ab, dass er Folgendes tut: Die Eingabe ist nach wie vor eine Hornformel F. Wenn F unerfüllbar ist, dann gib „unerfüllbar“ aus. Wenn F erfüllbar ist, dann liefer das kleinste Modell von F.