Universität Siegen
Lehrstuhl Theoretische Informatik
Markus Lohrey

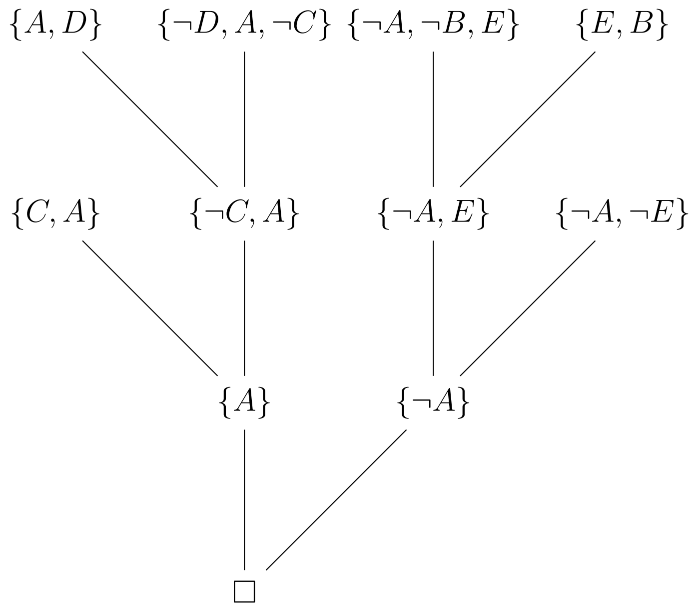
Logik I
WS 2022/23

# Übungsblatt 5

**Aufgabe 1**
Überprüfen Sie mit dem Resolutionsverfahren, welche der folgenden Klauselmengen erfüllbar sind.

(a) $\{\{\neg E, \neg A\}, \{\neg D, A, \neg C\}, \{A, D\}, \{A, C\}, \{\neg A, \neg B, E\}, \{E, B\}\}$

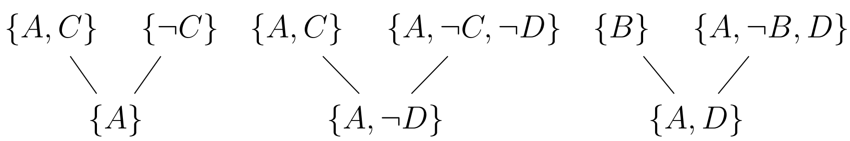
**Lösung**

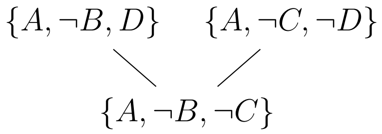



Die Klauselmenge ist also unerfüllbar.

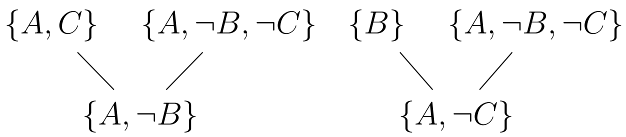
(b) $\{\{A, C\}, \{B\}, \{\neg C\}, \{A, \neg B, D\}, \{A, \neg C, \neg D\}\}$

**Lösung**
Aus den Ausgangsklauseln können wir folgende neue Klauseln resolvieren:






Danach können wir noch zwei neue Klauseln resolvieren:

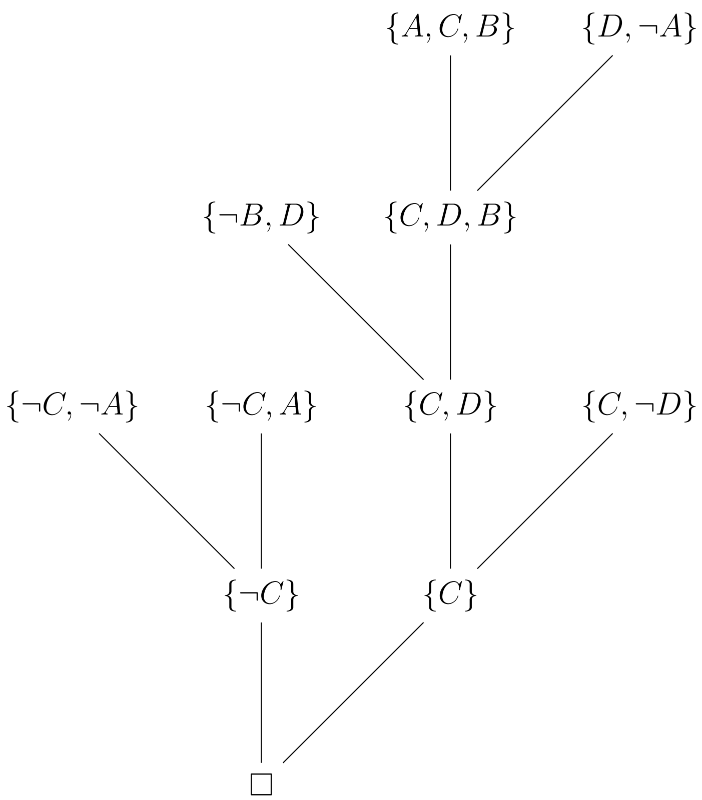



Nun sind keine weiteren Resolutionsschritte mehr möglich. Da wir nicht die leere Klausel $\Box$ herleiten konnten, ist die Klauselmenge erfüllbar.

Es wäre ebenfalls erlaubt zu argumentieren, dass man ohne das $\neg A$ für keines der vier atomaren Formeln ein Klausel-Paar $(\{L\}, \{\neg L\})$ ableiten kann.

(c) $\{\{\neg C, A\}, \{C, \neg D\}, \{D, \neg B\}, \{D, \neg A\}, \{\neg A, \neg C\}, \{A, C, B\}\}$

**Lösung**




Die Klauselmenge ist also unerfüllbar.

**Aufgabe 2**
Berechnen Sie $\mathrm{Res}^i(F)$ für $i = 0, 1, \ldots$ für die Formel $F$ mit Klauselmenge

$$\{\{A, \neg B\}, \{A, B, \neg C\}, \{B, C\}, \{\neg A, \neg C\}\}.$$

Was ist die kleinste Zahl $n$ mit $\mathrm{Res}^n(F) = \mathrm{Res}^*(F)$?

**Lösung**
Es gilt $\mathrm{Res}^0(F) = F$. Des Weiteren gilt

$$\begin{aligned}
\mathrm{Res}^1(F) &= \mathrm{Res}^0(F) \cup \{\{A, \neg C\}, \{A, C\}, \{\neg B, \neg C\}, \{A, B\}, \{B, \neg C\}, \{\neg A, B\}\},\\
\mathrm{Res}^2(F) &= \mathrm{Res}^1(F) \cup \{\{A\}, \{A, \neg A\}, \{B, \neg B\}, \{C, \neg C\}, \{B\}, \{\neg C\}\}
\end{aligned}$$

und $\mathrm{Res}^{i+2}(F) = \mathrm{Res}^2(F)$ für alle $i \in \mathbb{N}$, also $\mathrm{Res}^*(F) = \mathrm{Res}^2(F)$.

**Aufgabe 3**
Sei $F$ eine Formel in KNF, $A$ eine atomare Formel und $F_1 = \{K \setminus \{\neg A\} \mid K \in F,\ A \notin K\}$. Zeigen Sie, dass $F_1$ unerfüllbar ist, wenn $F$ unerfüllbar ist.

**Lösung**
Wir nehmen an, dass $F_1$ erfüllbar ist und zeigen, dass dann auch $F$ erfüllbar ist. Sei $\mathcal{B}$ eine zu $F_1$ passende Belegung mit $\mathcal{B} \models F_1$. Wir erweitern $\mathcal{B}$ zu $\mathcal{B}'$, indem wir $\mathcal{B}'(A) = 1$ setzen. Sei nun $K \in F$. Wenn $A \in K$, dann gilt $\mathcal{B}' \models K$, weil $\mathcal{B}'(A) = 1$. Wenn $A \notin K$, dann ist $K \setminus \{\neg A\} \in F_1$ und es gilt $\mathcal{B} \models K \setminus \{\neg A\}$. Dann gilt auch $\mathcal{B}' \models K$ (hier ist sogar egal, ob $\neg A$ in $K$ vorkommt und was $\mathcal{B}'(A)$ ist). Insgesamt gilt also $\mathcal{B}' \models F$.

**Aufgabe 4**
Zeigen Sie, dass für alle Formeln $F, G$ in KNF gilt: Wenn $F \subseteq G$, dann $\mathrm{Res}^*(F) \subseteq \mathrm{Res}^*(G)$.

**Lösung**
Die Definition von Res lässt sich schreiben als

$$\mathrm{Res}(M) = M \cup \{(K_1 \setminus \{A\}) \cup (K_2 \setminus \{\neg A\}) \mid K_1, K_2 \in M, A \in K_1, \neg A \in K_2\}.$$

Aus $F \subseteq G$ folgt unmittelbar, dass $\mathrm{Res}(F) \subseteq \mathrm{Res}(G)$. Dann lässt sich per Induktion zeigen, dass für alle $i \in \mathbb{N}$ gilt: $\mathrm{Res}^i(F) \subseteq \mathrm{Res}^i(G)$. Im Fall $i = 0$ gilt dies, weil

$$Res^0(F) = F \subseteq G = \mathrm{Res}^0(G).$$

Gelte nun $\mathrm{Res}^i(F) \subseteq \mathrm{Res}^i(G)$. Daraus folgt

$$\mathrm{Res}^{i+1}(F) = \mathrm{Res}(\mathrm{Res}^i(F)) \subseteq \mathrm{Res}(\mathrm{Res}^i(G)) = \mathrm{Res}^{i+1}(G).$$

Weiterhin gilt, dass $\mathrm{Res}^*(F) = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \mathrm{Res}^i(F) \subseteq \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \mathrm{Res}^i(G) = \mathrm{Res}^*(G)$.