Universität Siegen
Lehrstuhl Theoretische Informatik
Markus Lohrey

Übungsblatt 6

Aufgabe 1
Sei P ein einstelliges und R ein zweistelliges Relationssymbol; außerdem sei f ein einstelliges Funktionssymbol. Wobei handelt es sich um prädikatenlogische Formeln?

(a) $\exists x \neg P(x)$

Lösung
Ja.

(b) $\forall x \forall y (R(x, y) \to f(R(x, y)))$

Lösung
Nein, denn $R(x, y)$ ist eine Formel und $f(R(x, y))$ ist damit keine Formel.

(c) $f(x) = f(x)$

Lösung
Ja, siehe Folie 130 zur Konvention bzgl. „= “.

(d) $\forall n \exists p \exists q \, n = p \cdot q$

Lösung
Nein, da $\cdot$ nicht definiert ist.

(e) $\exists x \forall y (P(y) \lor \neg \forall x R(x, f(x)))$

Lösung
Ja.

(f) $P(x)$

Lösung
Ja.

(g) $f(f(x))$

Lösung
Nein, das ist nur ein Term.

(h) $(\forall y R(x, z) \land \exists x P(y))$

Lösung
Ja.

Aufgabe 2
Gegeben sei folgende Formel

$$F = ((Q(x) \lor \exists x \forall y (P(f(x), y) \land Q(a))) \lor \forall x R(x, z, g(x)))$$

(a) Geben Sie alle Teilformeln und Terme an, die in F vorkommen.

Lösung
Die Terme sind x, $f(x)$, y, a, z und $g(x)$. Die atomaren Teilformeln sind $Q(x)$, $P(f(x), y)$, $Q(a)$ und $R(x, z, g(x))$. Die restlichen Teilformeln sind

$$\begin{aligned}
&(P(f(x), y) \land Q(a)),\\
&\forall y (P(f(x), y) \land Q(a)),\\
&\exists x \forall y (P(f(x), y) \land Q(a)),\\
&(Q(x) \lor \exists x \forall y (P(f(x), y) \land Q(a))),\\
&\forall x R(x, z, g(x))
\end{aligned}$$

und F selbst.

(b) Welche der Teilformeln sind Aussagen?

Lösung
$Q(a)$ und $\exists x \forall y (P(f(x), y) \land Q(a))$.

(c) Geben Sie für jede Variable an, ob sie frei oder gebunden in F vorkommt.

Lösung
Das x in $Q(x)$ und z sind frei, alle anderen gebunden.

(d) Geben Sie die Matrix von F an.

Lösung
$F^* = ((Q(x) \lor (P(f(x), y) \land Q(a))) \lor R(x, z, g(x)))$

Aufgabe 3
Zu einer Formel F sei $\mathrm{Free}(F)$ die Menge der in ihr frei vorkommenden Variablen. Definieren Sie $\mathrm{Free}(F)$ durch Induktion über den Formelaufbau.

Lösung
Wir müssen zunächst Free für Terme definieren. Für Variablen x setzen wir $\mathrm{Free}(x) = \{x\}$. Wenn f ein n-stelliges Funktionssymbol ist und $t_1, \ldots, t_n$ Terme sind, dann setzen wir

$$\mathrm{Free}(f(t_1, \ldots, t_n)) = \bigcup \{\mathrm{Free}(t_i) \mid 1 \leq i \leq n\}.$$

Nun definieren wir Free auf Formeln. Wenn R ein n-stelliges Relationssymbol ist und $t_1, \ldots, t_n$ Terme sind, dann setzen wir

$$\mathrm{Free}(R(t_1, \ldots, t_n)) = \bigcup \{\mathrm{Free}(t_i) \mid 1 \leq i \leq n\}.$$

Seien nun F und G Formeln. Wir setzen $\mathrm{Free}(F \wedge G) = \mathrm{Free}(F \vee G) = \mathrm{Free}(F) \cup \mathrm{Free}(G)$. Sei F eine Formel. Wir setzen $\mathrm{Free}(\neg F) = \mathrm{Free}(F)$. Sei F eine Formel und x eine Variable. Wir setzen $\mathrm{Free}(\forall x F) = \mathrm{Free}(\exists x F) = \mathrm{Free}(F) \setminus \{x\}$.