

Übungsblatt 7

Aufgabe 1

Gegeben seien ein zweistelliges Funktionssymbol f und ein zweistelliges Prädikatensymbol R . Betrachten Sie die folgenden drei Strukturen:

- $\mathcal{C} = (\{0, 1, 2\}, I_{\mathcal{C}})$, wobei $f^{\mathcal{C}}(x, y) = x$, $R^{\mathcal{C}} = \{(0, 1), (1, 2), (2, 0)\}$,
- $\mathcal{N} = (\mathbb{N}, I_{\mathcal{N}})$, wobei $f^{\mathcal{N}}(x, y) = x \cdot y$, $R^{\mathcal{N}} = \{(x, y) \in \mathbb{N}^2 \mid x \leq y\}$,
- $\mathcal{P} = (2^{\mathbb{N}}, I_{\mathcal{P}})$, wobei $f^{\mathcal{P}}(x, y) = x \cap y$, $R^{\mathcal{P}} = \{(x, y) \in 2^{\mathbb{N}} \times 2^{\mathbb{N}} \mid x \subseteq y\}$.

In welchen Strukturen gelten die folgenden Aussagen?

- (a) $F_a = \exists x \forall y R(y, x)$
- (b) $F_b = \forall x \forall y (R(x, y) \vee R(y, x))$

Aufgabe 2

Sei $\mathcal{N} = (\mathbb{N} \setminus \{0\}, I_{\mathcal{N}})$ die Struktur mit den zweistelligen Funktionssymbolen $+$ und \cdot und der Gleichheit $=$, welche alle die übliche Bedeutung haben sollen, also $I_{\mathcal{N}}(+)(x, y) = x + y$ und $I_{\mathcal{N}}(\cdot)(x, y) = x \cdot y$. Bei dem Symbol $=$ gehen wir immer davon aus, dass es mit der Gleichheit interpretiert wird, also $I_{\mathcal{N}}(=) = \{(x, x) \in (\mathbb{N} \setminus \{0\})^2 \mid x \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\}$. Formalisieren Sie die folgenden Eigenschaften durch prädikatenlogische Formeln.

- (a) x ist ungerade.
- (b) $x < y$.
- (c) y ist Vielfaches von x .
- (d) x ist gleich 1.
- (e) $x \bmod y = z$.
- (f) Es gibt keine größte natürliche Zahl.
- (g) x ist eine Primzahl.

Aufgabe 3

Zeigen Sie für die folgenden Formeln jeweils, ob sie gültig, unerfüllbar, oder erfüllbar, aber nicht gültig sind.

(a) $F_a = \forall x \exists y (P(x) \rightarrow P(y))$

(b) $F_b = \forall x (R(x, y) \wedge f(x) = y)$

(c) $F_c = (\exists y \forall x R(x, y) \rightarrow \forall x \exists y R(x, y))$

(d) $F_d = (\forall x R(x, x) \wedge \forall x \forall y (x \neq y \rightarrow S(x, y)) \wedge \forall x \forall y (S(x, y) \rightarrow R(x, y)) \wedge \neg R(a, b))$