Übungsblatt 7

Aufgabe 1
Gegeben seien ein zweistelliges Funktionssymbol f und ein zweistelliges Prädikatensymbol R. Betrachten Sie die folgenden drei Strukturen:

- $\mathcal{C} = (\{0,1,2\}, I_\mathcal{C})$, wobei $f^\mathcal{C}(x,y) = x$, $R^\mathcal{C} = \{(0,1),(1,2),(2,0)\}$,
- $\mathcal{N} = (\mathbb{N}, I_\mathcal{N})$, wobei $f^\mathcal{N}(x,y) = x \cdot y$, $R^\mathcal{N} = \{(x,y) \in \mathbb{N}^2 \mid x \leq y\}$,
- $\mathcal{P} = (2^\mathbb{N}, I_\mathcal{P})$, wobei $f^\mathcal{P}(x,y) = x \cap y$, $R^\mathcal{P} = \{(x,y) \in 2^\mathbb{N} \times 2^\mathbb{N} \mid x \subseteq y\}$.

In welchen Strukturen gelten die folgenden Aussagen?

(a) $F_a = \exists x \forall y R(y,x)$

Lösung
F_a bedeutet, dass es ein größtes Element bezüglich R gibt.

Es gilt $\mathcal{C} \not\models F_a$, denn $\mathcal{C}_{[x/0][y/1]} \not\models R(y,x)$, $\mathcal{C}_{[x/1][y/2]} \not\models R(y,x)$ und $\mathcal{C}_{[x/2][y/0]} \not\models R(y,x)$.

Für $\mathcal{N}$ bedeutet F_a, dass es eine größte natürliche Zahl gibt. Demnach gilt $\mathcal{N} \not\models F_a$. Beweis: Sei $n \in \mathbb{N}$ mit $\mathcal{N}_{[x/n]} \models \forall y R(y,x)$, d.h. für alle $m \in \mathbb{N}$ gilt $\mathcal{N}_{[x/n][y/m]} \models R(y,x)$, also $m \leq n$. Dies ist aber falsch für $m = n+1$.

Für $\mathcal{P}$ bedeutet F_a, dass es eine Menge $A \subseteq \mathbb{N}$ gibt, sodass für alle Mengen $M \subseteq \mathbb{N}$ gilt, dass $M \subseteq A$. Dies gilt für $\mathbb{N}$ selbst, also $\mathcal{P} \models F_a$. Genauer: Sei $M \in 2^\mathbb{N}$. Dann gilt $\mathcal{P}_{[x/\mathbb{N}][y/M]} \models R(y,x)$, denn $M \subseteq \mathbb{N}$.

(b) $F_b = \forall x \forall y (R(x,y) \vee R(y,x))$

Lösung
F_b bedeutet, dass R total ist.

Es gilt $\mathcal{C} \not\models F_b$, denn $\mathcal{C}_{[x/0][y/0]} \not\models (R(x,y) \vee R(y,x))$, weil $(0,0) \notin R^\mathcal{C}$.

Es gilt $\mathcal{N} \models F_b$, denn für alle $n, m \in \mathbb{N}$ gilt $n \leq m$ oder $m \leq n$, bzw. $\mathcal{N}_{[x/n][y/m]} \models (R(x,y) \vee R(y,x))$.

Es gilt $\mathcal{P} \not\models F_b$, denn sei $M = \{1\}$ und $M' = \{2\}$. Dann gilt $M \nsubseteq M'$ und $M' \nsubseteq M$, also $\mathcal{P}_{[x/M][y/M']} \not\models (R(x,y) \vee R(y,x))$.

Aufgabe 2
Sei $\mathcal{N} = (\mathbb{N} \setminus \{0\}), I_\mathcal{N})$ die Struktur mit den zweistelligen Funktionssymbolen $+$ und $\cdot$ und der Gleichheit $=$, welche alle die übliche Bedeutung haben sollen, also $I_\mathcal{N}(+)(x,y) = x+y$ und $I_\mathcal{N}(\cdot)(x,y) = x \cdot y$. Bei dem Symbol $=$ gehen wir immer davon aus, dass es mit der Gleichheit interpretiert wird, also $I_\mathcal{N}(=) = \{(x,x) \in (\mathbb{N}\setminus\{0\})^2 \mid x \in \mathbb{N}\setminus\{0\}\}$. Formalisieren Sie die folgenden Eigenschaften durch prädikatenlogische Formeln.

(a) x ist ungerade.

Lösung
$\neg\exists y\ x = y + y$

(b) $x < y$.

Lösung
$\exists z\ y = x + z$

(c) y ist Vielfaches von x.

Lösung
$\exists z\ y = x \cdot z$

(d) x ist gleich 1.

Lösung
$\forall y\ y \cdot x = y$

(e) $x \bmod y = z$.

Lösung
$\exists w\ z + w \cdot y = x$

(f) Es gibt keine größte natürliche Zahl.

Lösung
$\forall x \exists y\ x < y$, wobei $x < y$ die Formel von Aufgabe b ist. Damit haben wir

$$\forall x \exists y \exists z\ y = x + z.$$

(g) x ist eine Primzahl.

Lösung
$(x \neq 1) \wedge \forall y\ ((\exists z\ x = y \cdot z) \rightarrow (y = 1 \vee y = x))$, wobei wir hier die Formel von Aufgabe d einsetzen können. Dadurch erhalten wir

$$(\forall z\ z \cdot w = z) \wedge \neg(x = w) \wedge \forall y\ ((\exists z\ x = y \cdot z) \rightarrow (y = w \vee y = x))$$

Aufgabe 3
Zeigen Sie für die folgenden Formeln jeweils, ob sie gültig, unerfüllbar, oder erfüllbar, aber nicht gültig sind.

(a) $F_a = \forall x \exists y (P(x) \to P(y))$

Lösung
Gültig. Sei $\mathcal{A}$ eine zu F_a passende Struktur und sei $d \in \mathcal{U}_\mathcal{A}$. Im Fall, dass $d \notin P^\mathcal{A}$, gilt auch $\mathcal{A}_{[x/d][y/d']} \models (P(x) \to P(y))$ für alle $d' \in \mathcal{U}_\mathcal{A}$. Wenn $d \in P^\mathcal{A}$, dann gilt $\mathcal{A}_{[x/d][y/d]} \models (P(x) \to P(y))$. In beiden Fällen gilt also $\mathcal{A}_{[x/d]} \models \exists y (P(x) \to P(y))$. Insgesamt gilt daher $\mathcal{A} \models F_a$.

(b) $F_b = \forall x (R(x,y) \wedge f(x) = y)$

Lösung
Erfüllbar, aber nicht gültig. Es gilt $\mathcal{A} \models F_b$ mit $\mathcal{U}_\mathcal{A} = \{0\}$, $y^\mathcal{A} = 0$, $R^\mathcal{A} = \mathcal{U}_\mathcal{A} \times \mathcal{U}_\mathcal{A}$ und $f^\mathcal{A}(x) = x$. Außerdem gilt für jede zu F_b passende Struktur $\mathcal{B}$ mit $R^\mathcal{B} = \emptyset$, dass $\mathcal{B} \not\models F_b$, zum Beispiel für $\mathcal{U}_\mathcal{B} = \{0\}$, $y^\mathcal{B} = 0$, $R^\mathcal{B} = \emptyset$ und $f^\mathcal{B}(x) = x$.

(c) $F_c = (\exists y \forall x R(x,y) \to \forall x \exists y R(x,y))$

Lösung
Gültig. Sei $\mathcal{A}$ eine zu F_c passende Struktur und gelte $\mathcal{A} \models \exists y \forall x R(x,y)$. D.h. es gibt ein $d \in \mathcal{U}_\mathcal{A}$ mit $\mathcal{A}_{[y/d]} \models \forall x R(x,y)$. Somit gibt es ein $d \in \mathcal{U}_\mathcal{A}$, sodass für jedes $d' \in \mathcal{U}_\mathcal{A}$ gilt, dass $\mathcal{A}_{[y/d][x/d']} \models R(x,y)$. Das heißt, dass es für jedes $d' \in \mathcal{U}_\mathcal{A}$ ein $d \in \mathcal{U}_\mathcal{A}$ gibt, sodass $\mathcal{A}_{[x/d'][y/d]} \models R(x,y)$. Daraus folgt, dass $\mathcal{A}_{[x/d']} \models \exists y R(x,y)$ für jedes $d' \in \mathcal{U}_\mathcal{A}$ und somit auch $\mathcal{A} \models \forall x \exists y R(x,y)$. Insgesamt gilt also $\mathcal{A} \models F_c$.

(d) $F_d = (\forall x R(x,x) \wedge \forall x \forall y (x \neq y \to S(x,y)) \wedge \forall x \forall y (S(x,y) \to R(x,y)) \wedge \neg R(a,b))$

Lösung
Unerfüllbar. Sei $\mathcal{A}$ eine zu F_d passende Struktur, wobei wir annehmen, dass $\mathcal{A} \models F_d$. Wegen $\mathcal{A} \models \neg R(a,b)$, muss $(a^\mathcal{A}, b^\mathcal{A}) \notin R^\mathcal{A}$ gelten. Wenn $a^\mathcal{A} = b^\mathcal{A}$, so ist dies ein Widerspruch zu $\mathcal{A} \models \forall x R(x,x)$. Sei also $a^\mathcal{A} \neq b^\mathcal{A}$. Wegen $\mathcal{A} \models \forall x \forall y (x \neq y \to S(x,y))$, gilt also, dass $(a^\mathcal{A}, b^\mathcal{A}) \in S^\mathcal{A}$. Wegen $\mathcal{A} \models \forall x \forall y (S(x,y) \to R(x,y))$, folgt dann auch, dass $(a^\mathcal{A}, b^\mathcal{A}) \in R^\mathcal{A}$, was aber ein Widerspruch zu $(a^\mathcal{A}, b^\mathcal{A}) \notin R^\mathcal{A}$ ist. Insgesamt muss also $\mathcal{A} \not\models F_d$ gelten.