Universität Siegen
Lehrstuhl Theoretische Informatik
Markus Lohrey

Übungsblatt 8

Aufgabe 1
Zeigen Sie, dass folgende Formeln erfüllbar, aber nicht gültig sind.

(a) $F_a := \forall y \exists x \; f(x) = y$

Lösung
Es gilt $\mathcal{A} \models F_a$ mit $\mathcal{U}_\mathcal{A} = \{0\}$ und $f^\mathcal{A}(x) = 0$. Außerdem gilt $\mathcal{B} \not\models F_a$ mit $\mathcal{U}_\mathcal{B} = \{0, 1\}$ und $f^\mathcal{B}(x) = 0$.

(b) $F_b := \forall x \forall y (f(x) = f(y) \to x = y)$

Lösung
Es gilt $\mathcal{A} \models F_b$ mit $\mathcal{U}_\mathcal{A} = \{0\}$ und $f^\mathcal{A}(x) = 0$. Außerdem gilt $\mathcal{B} \not\models F_b$ mit $\mathcal{U}_\mathcal{B} = \{0, 1\}$ und $f^\mathcal{B}(x) = 0$.

(c) $F_c := (\exists y \forall x \, f(x) = g(x, y) \land \exists x \, f(x) \neq g(x, x))$

Lösung
Sei $\mathcal{A}$ definiert als $\mathcal{U}_\mathcal{A} = \{0, 1\}$, $f^\mathcal{A}(x) = x$, $g^\mathcal{A}(x, 0) = x$ und $g^\mathcal{A}(x, 1) = 0$. Dann gilt $\mathcal{A} \models \exists y \forall x \, f(x) = g(x, y)$, weil $\mathcal{A}_{[x/d][y/0]}(f(x)) = d$ und $\mathcal{A}_{[x/d][y/0]}(g(x, y)) = d$ für alle $d \in \{0, 1\}$. Außerdem gilt $\mathcal{A} \models \exists x \, f(x) \neq g(x, x)$, weil $\mathcal{A}_{[x/1]}(f(x)) = 1$ und $\mathcal{A}_{[x/1]}(g(x, x)) = 0$. Insgesamt gilt also $\mathcal{A} \models F_c$. Mit $\mathcal{U}_\mathcal{B} = \{0\}$, $f^\mathcal{B}(x) = 0$ und $g^\mathcal{B}(x, y) = 0$ gilt $\mathcal{B} \not\models F_c$, weil $\mathcal{B} \not\models \exists x \, f(x) \neq g(x, x)$.

Aufgabe 2
Zeigen Sie die folgenden Behauptungen:

(a) $\exists x (F \land G) \models (\exists x F \land \exists x G)$

Lösung
Sei $\mathcal{A}$ eine Struktur, die zu F und G passend ist, und gelte $\mathcal{A} \models \exists x (F \land G)$. Dann gibt es ein $d \in \mathcal{U}_\mathcal{A}$ mit $\mathcal{A}_{[x/d]} \models (F \land G)$. Also gibt es ein $d \in \mathcal{U}_\mathcal{A}$ mit $\mathcal{A}_{[x/d]} \models F$ und $\mathcal{A}_{[x/d]} \models G$. Somit gibt es ein $d \in \mathcal{U}_\mathcal{A}$ mit $\mathcal{A}_{[x/d]} \models F$ und es gibt ein $d \in \mathcal{U}_\mathcal{A}$ mit $\mathcal{A}_{[x/d]} \models G$. Daraus folgt, dass $\mathcal{A} \models \exists x F$ und $\mathcal{A} \models \exists x G$, also $\mathcal{A} \models (\exists x F \land \exists x G)$.

(b) $(\exists x F \lor \forall x G) \models \exists x (F \lor G)$

Lösung
Sei $\mathcal{A}$ eine Struktur, die zu F und G passend ist, und gelte $\mathcal{A} \models (\exists xF \vee \forall xG)$. D.h. $\mathcal{A} \models \exists xF$ oder $\mathcal{A} \models \forall xG$. Wir machen nun eine Fallunterscheidung. Im Fall, dass $\mathcal{A} \models \exists xF$, gibt es ein $d \in \mathcal{U}_\mathcal{A}$ mit $\mathcal{A}_{[x/d]} \models F$. Also gibt es ein $d \in \mathcal{U}_\mathcal{A}$ mit $\mathcal{A}_{[x/d]} \models F$ oder $\mathcal{A}_{[x/d]} \models G$. Zusammen gilt dann, dass es ein $d \in \mathcal{U}_\mathcal{A}$ gibt mit $\mathcal{A}_{[x/d]} \models (F \vee G)$, also $\mathcal{A} \models \exists x(F \vee G)$. Im anderen Fall gilt $\mathcal{A} \models \forall xG$. Weil $|\mathcal{U}_\mathcal{A}| \neq \emptyset$, gilt auch $\mathcal{A} \models \exists xG$. Analog zum ersten Fall erhalten wir auch hier, dass $\mathcal{A} \models \exists x(F \vee G)$. Insgesamt gilt also $\mathcal{A} \models \exists x(F \vee G)$.

(c) $\forall x(F \to G) \models (\forall xF \to \forall xG)$

Lösung
Sei $\mathcal{A}$ eine zu F und G passende Struktur und gelte $\mathcal{A} \models \forall x(F \to G)$. Daraus folgt, dass $\mathcal{A}_{[x/d]} \models (F \to G)$ für alle $d \in \mathcal{U}_\mathcal{A}$. Das heißt, dass für jedes $d \in \mathcal{U}_\mathcal{A}$ gilt, dass wenn $\mathcal{A}_{[x/d]} \models F$, dann gilt auch $\mathcal{A}_{[x/d]} \models G$. Gelte nun außerdem $\mathcal{A} \models \forall xF$, woraus folgt, dass $\mathcal{A}_{[x/d]} \models F$ für alle $d \in \mathcal{U}_\mathcal{A}$. Zusammen erhalten wir also, dass $\mathcal{A}_{[x/d]} \models G$ für alle $d \in \mathcal{U}_\mathcal{A}$, also $\mathcal{A} \models \forall xG$. Insgesamt gilt also $\mathcal{A} \models (\forall xF \to \forall xG)$.

Aufgabe 3

Sei $\mathcal{A} = (U_\mathcal{A}, I_\mathcal{A})$ eine Struktur, wobei das Universum gegeben ist als $U_\mathcal{A} = \{a, b\}^*$ und die Interpretationsfunktion definiert ist durch

- $f^\mathcal{A}(x, y) = xy$ (die Konkatenation von Wörtern),
- $P^\mathcal{A} = \{w \in \{a, b\}^* \mid w \text{ enthält genau ein } a\}$
- $Q^\mathcal{A} = \{w \in \{a, b\}^* \mid |w| \text{ ist gerade }\}$
- $c^\mathcal{A} = aba$

und „=“ wie üblich ein 2-stelliges Prädikatensymbol darstellt, das mit der Gleichheit interpretiert wird. Formulieren Sie die folgenden Sätze als prädikatenlogische Formeln:

(a) Das Wort *aba* hat ungerade Länge.

Lösung
$\neg Q(c)$

(b) Es gibt ein Wort, das genau ein a enthält und gerade Länge hat.

Lösung
$\exists x(P(x) \wedge Q(x))$

(c) Das Wort *aba* enthält genau zwei a.

Lösung
$\exists y \exists z(P(y) \wedge P(z) \wedge c = f(y, z))$

(d) x ist ein Teilstring von y.

Lösung
$\exists z_1 \exists z_2 \; y = f(z_1, f(x, z_2))$

(e) Jede Kontatenation zweier Wörter gerader Länge ergibt ein Wort gerader Länge.

Lösung
$\forall x \forall y ((Q(x) \land Q(y)) \to Q(f(x, y)))$

(f) x ist das leere Wort.

Lösung
$\forall y \; y = f(x, y)$