Übungsblatt 11

Aufgabe 1
Betrachten Sie die folgende Aussage:

$$F = (P(a) \land \forall x(P(x) \rightarrow \big(\neg P(s(x)) \land P(s(s(x)))\big)))$$

(a) Geben Sie das Herbrand-Universum $D(\mathcal{F})$ an, wobei $\mathcal{F}$ die Menge aller Funktionssymbole in der Formel F ist.

(b) Geben Sie ein Herbrand-Modell $\mathcal{A}$ für F an. Beschreiben Sie $\mathcal{A}$ in einfachen Worten.

(c) Berechnen Sie die Herbrand-Expansion $E(G)$, wobei G die Skolemform von F ist.

(d) Geben Sie ein (aussagenlogisches) Modell von $E(G)$ an.

Aufgabe 2
Sei $\mathcal{R} = (\mathbb{R}, I_{\mathcal{R}})$ die Struktur über den reellen Zahlen mit den zweistelligen Funktionssymbolen $+$ und $\cdot$ (analog zu Aufgabe 2 von Übungsblatt 7) und der Gleichheit $=$. Diese sollen alle die übliche Bedeutung haben, also $I_{\mathcal{R}}(+)(x, y) = x + y$ und $I_{\mathcal{R}}(\cdot)(x, y) = x \cdot y$. Bei dem Symbol $=$ gehen wir immer davon aus, dass es mit der Gleichheit interpretiert wird, also $I_{\mathcal{R}}(=) = \{(x, x) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in \mathbb{R}\}$.
Formalisieren Sie folgende Eigenschaften durch prädikatenlogische Formeln:

(a) $x = 0$

(b) $x = 1$

(c) $x > 0$

(d) $x < y$

Aufgabe 3
Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Behauptungen:

(a) Eine Formel ist genau dann erfüllbar, wenn sie ein Herbrand-Modell besitzt.

(b) Jede Formel ist äquivalent zu ihrer Skolemform.

(c) Es gibt unendlich viele paarweise nicht äquivalente Formeln über einer festen Menge von Prädikaten- und Funktionssymbolen.