Universität Siegen
Lehrstuhl Theoretische Informatik
Markus Lohrey

Übungsblatt 11

Aufgabe 1
Betrachten Sie die folgende Aussage:

$$F = (P(a) \wedge \forall x(P(x) \to \big(\neg P(s(x)) \wedge P(s(s(x)))\big)))$$

(a) Geben Sie das Herbrand-Universum $D(\mathcal{F})$ an, wobei $\mathcal{F}$ die Menge aller Funktionssymbole in der Formel F ist.

Lösung
Es gilt $\mathcal{F} = \{a, s\}$. Also ist das Herbrand-Universum

$$D(\mathcal{F}) = \{a, s(a), s(s(a)), \dots\} = \{s^n(a) \mid n \in \mathbb{N}\}.$$

(b) Geben Sie ein Herbrand-Modell $\mathcal{A}$ für F an. Beschreiben Sie $\mathcal{A}$ in einfachen Worten.

Lösung
Ein Term $s^n(a) \in D(\mathcal{F})$ kann als Darstellung der natürlichen Zahl $n \in \mathbb{N}$ aufgefasst werden. Idee: P bedeutet „gerade“ und s bedeutet „Nachfolger“. Damit sagt $P(a)$, dass 0 gerade ist, und $(P(x) \to \big(\neg P(s(x)) \wedge P(s(s(x)))\big))$ sagt: Für jede gerade natürliche Zahl n gilt, dass $n+1$ nicht gerade ist und $n+2$ gerade ist.

Wir definieren also $\mathcal{U}_\mathcal{A} = D(\mathcal{F})$, wobei $a^\mathcal{A} = s^0(a)$, $s^\mathcal{A}(s^n(a)) = s(s^n(a)) = s^{n+1}(a)$ für $n \in \mathbb{N}$ und $P^\mathcal{A} = \{s^{2n}(a) \mid n \in \mathbb{N}\}$. Damit ist $\mathcal{A}$ eine Herbrand-Struktur und es gilt $\mathcal{A} \models F$.

(c) Berechnen Sie die Herbrand-Expansion $E(G)$, wobei G die Skolemform von F ist.

Lösung
Zunächst müssen wir die Formel F in ihre Skolemform überführen. Dazu geben wir im ersten Schritt erst einmal ihre BPF an:

$$F \equiv \forall x(P(a) \wedge (\neg P(x) \vee \big(\neg P(s(x)) \wedge P(s(s(x)))\big)))$$

Somit ist dies auch die gesuchte Skolemform G. Sei nun $\mathcal{F}'$ die Menge der Funktionssymbole aus G, also $\mathcal{F}' = \mathcal{F}$. Folglich ist $D(\mathcal{F}') = D(\mathcal{F})$ (siehe a). Wir erhalten als Herbrand-Expansion also

$$\begin{aligned} E(G) &= \{(P(a) \wedge (\neg P(s^n(a)) \vee \big(\neg P(s^{n+1}(a)) \wedge P(s^{n+2}(a))\big))) \mid n \in \mathbb{N}\} \\ &= \{(P(a) \wedge (P(s^n(a)) \to \big(\neg P(s^{n+1}(a)) \wedge P(s^{n+2}(a))\big))) \mid n \in \mathbb{N}\} \end{aligned}$$

(d) Geben Sie ein (aussagenlogisches) Modell von $E(G)$ an.

Lösung
Sei $\mathcal{B}$ eine Belegung wie folgt:

$$\mathcal{B}(P(s^n(a)) = 1 \text{ gdw. } n \text{ gerade ist}$$

Dann ist $\mathcal{B}$ in der Tat ein Modell von $E(G)$, denn $\mathcal{B}(P(a)) = 1$ und (wie bei b) wenn $\mathcal{B}(P(s^n(a))) = 1$ ist, dann ist $\mathcal{B}(P(s^{n+1}(a))) = 0$ und $\mathcal{B}(P(s^{n+2}(a))) = 1$.

Aufgabe 2
Sei $\mathcal{R} = (\mathbb{R}, I_{\mathcal{R}})$ die Struktur über den reellen Zahlen mit den zweistelligen Funktionssymbolen $+$ und $\cdot$ (analog zu Aufgabe 2 von Übungsblatt 7) und der Gleichheit $=$. Diese sollen alle die übliche Bedeutung haben, also $I_{\mathcal{R}}(+)(x, y) = x + y$ und $I_{\mathcal{R}}(\cdot)(x, y) = x \cdot y$. Bei dem Symbol $=$ gehen wir immer davon aus, dass es mit der Gleichheit interpretiert wird, also $I_{\mathcal{R}}(=) = \{(x, x) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in \mathbb{R}\}$.
Formalisieren Sie folgende Eigenschaften durch prädikatenlogische Formeln:

(a) $x = 0$

Lösung
$\forall y\ x \cdot y = x$, alternativ $\forall y\ x + y = y$

(b) $x = 1$

Lösung
$\forall y\ x \cdot y = y$

(c) $x > 0$

Lösung
$(\exists y\ x = y \cdot y \wedge \neg(x = 0))$

Hier müssen wir für $x = 0$ die Formel aus Teilaufgabe a einsetzen. Wir erhalten also

$$(\exists y\ x = y \cdot y \wedge \neg\forall y\ x \cdot y = x).$$

(d) $x < y$

Lösung
$\exists z(z > 0 \wedge x + z = y)$

Hier müssen wir für $z > 0$ die Formel aus Teilaufgabe c einsetzen. Wir erhalten also

$$\exists z((\exists u\ z = u \cdot u \wedge \neg\forall u\ z \cdot u = z) \wedge x + z = y).$$

Aufgabe 3
Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Behauptungen:

(a) Eine Formel ist genau dann erfüllbar, wenn sie ein Herbrand-Modell besitzt.

Lösung
Wahr. Wenn F ein Herbrand-Modell besitzt, so ist F auch erfüllbar. Sei F nun erfüllbar. Dann ist die Skolemform F' von F auch erfüllbar. Deswegen besitzt F' ein Herbrand-Modell. Nach der Bemerkung auf Folie 161 gilt, dass dieses Herbrand-Modell sogar ein Modell von F ist.

(b) Jede Formel ist äquivalent zu ihrer Skolemform.

Lösung
Falsch. Es gilt $\exists x P(x) \not\equiv P(a)$, denn für $\mathcal{U}_{\mathcal{A}} = \{0,1\}$, $a^{\mathcal{A}} = 0$ und $P^{\mathcal{A}} = \{1\}$ gilt, dass $\mathcal{A} \models \exists x P(x)$, aber $\mathcal{A} \not\models P(a)$.

(c) Es gibt unendlich viele paarweise nicht äquivalente Formeln über einer festen Menge von Prädikaten- und Funktionssymbolen.

Lösung
Im Fall, dass man kein Prädikatensymbol zur Verfügung hat, stimmt dies nicht, da man dann keine Formeln bilden kann. Sei nun P ein einstelliges Prädikatensymbol. Dann sind die Formeln $P(x_1), P(x_2), \ldots$ alle paarweise nicht äquivalent: Seien $P(x_i)$ und $P(x_j)$ mit $i \neq j$ zwei dieser Formeln. Sei $\mathcal{A}_i = (U_{\mathcal{A}_i}, I_{\mathcal{A}_i})$ eine Struktur und sei $\mathcal{U}_{\mathcal{A}_i} = \{0,1\}$ mit $x_i^{\mathcal{A}_i} = 0$, $x_j^{\mathcal{A}_i} = 1$ und $P^{\mathcal{A}_i} = \{0\}$. Dann gilt $\mathcal{A}_i \models P(x_i)$, aber $\mathcal{A}_i \not\models P(x_j)$. Für mehrstellige Prädikatensymbole ist die Argumentation ähnlich (nehme $P(x_i, y_1, \ldots, y_k)$ für $i \in \mathbb{N}$ und entsprechendes $k \geq 1$).