Universität Siegen
Lehrstuhl Theoretische Informatik
Markus Lohrey

Übungsblatt 12

Aufgabe 1
Beweisen oder widerlegen Sie:

(a) Es existiert eine erfüllbare Formel F, sodass jedes Modell für F ein überabzählbar unendliches Universum besitzt.

(b) Jede Formel, die erfüllbar ist, besitzt ein Modell mit einem endlichen Universum.

(c) Es existiert eine erfüllbare Formel F, die mindestens ein (nicht nullstelliges) Funktionssymbol enthält, aber kein Modell mit einem unendlichen Universum besitzt.

Aufgabe 2
Zu einer Menge M von Aussagen in Skolemform schreiben wir $\mathcal{F}(M)$ für die Funktionssymbole, die in M vorkommen. Geben Sie zu den folgenden Formeln F jeweils $\mathcal{F}(\{F\})$, $D(\{F\})$ und $E(\{F\})$ an. Geben Sie anschließend eine unerfüllbare Formel $(F_1 \wedge \cdots \wedge F_k)$ an mit $F_i \in E(F)$ für $1 \leq i \leq k$.

(a) $F_a = \forall x(P(x) \wedge \neg P(x))$

(b) $F_b = \forall x((P(x) \vee \neg Q(x)) \wedge \neg P(f(a)) \wedge Q(f(a)))$

(c) $F_c = \forall x \forall y((\neg P(x) \vee \neg P(f(y))) \wedge P(f(f(x))))$

Aufgabe 3
Betrachten Sie folgende Eigenschaften einer binären Relation R:

1. R ist nicht leer.
2. R ist reflexiv.
3. R ist irreflexiv.
4. R ist symmetrisch.
5. R ist transitiv.

(a) Formulieren Sie jede Eigenschaft als Formel.

(b) Geben Sie zu jeder Formel ein Modell an.