Compilerbau

Markus Lohrey

Universität Siegen

SoSe 2022

Diese Folien sind eine leicht veränderte Fassung der Folien von Axel Simon und Michael Petter (TU München).

Themengebiet:

Einführung

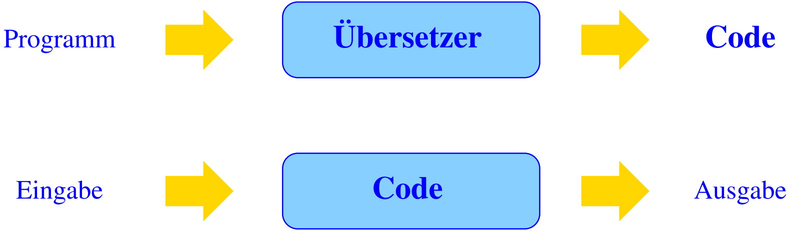
Prinzip eines Interpreters:

Vorteil: Keine Vorberechnung auf dem Programmtext erforderlich.
$\Longrightarrow$ keine bzw. geringe Startup-Zeit.

Nachteil: Während der Ausführung werden die Programm-Bestandteile immer wieder analysiert.
$\Longrightarrow$ längere Laufzeit

Beispiel: Python

Prinzip eines Übersetzers:



Zwei Phasen:

- Übersetzung des Programm-Texts in ein Maschinen-Programm
- Ausführung des Maschinen-Programms auf der Eingabe

Eine Vorberechnung auf dem Programm gestattet u.a.

- eine geschickte(re) Verwaltung der Variablen;
- Erkennung und Umsetzung globaler Optimierungsmöglichkeiten.

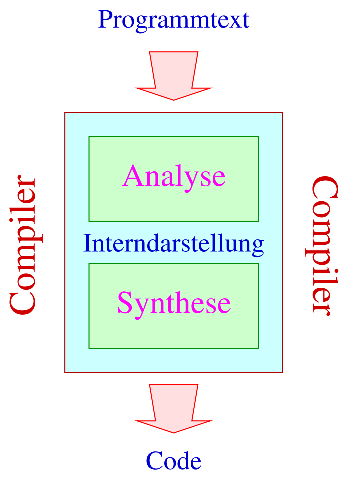
Nachteil: Die Übersetzung selbst dauert einige Zeit.

Vorteil: Die Ausführung des Programme wird effizienter.

Lohnt sich bei aufwendigen Programmen und solchen, die mehrmals laufen.

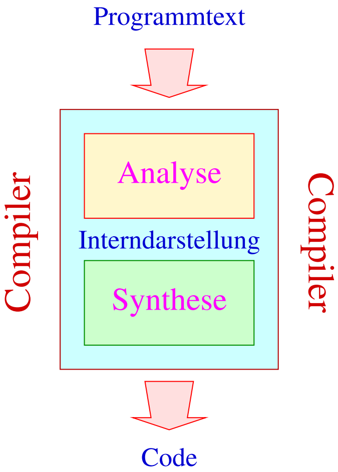
Beispiele: C, C++

Übersetzer:



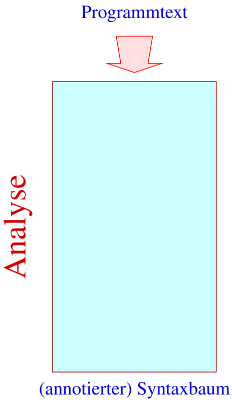
Programmtext
Analyse
Interndarstellung
Synthese
Compiler
Compiler
Code

Übersetzer:


Programmtext
Analyse
Interndarstellung
Synthese
Compiler
Compiler
Code

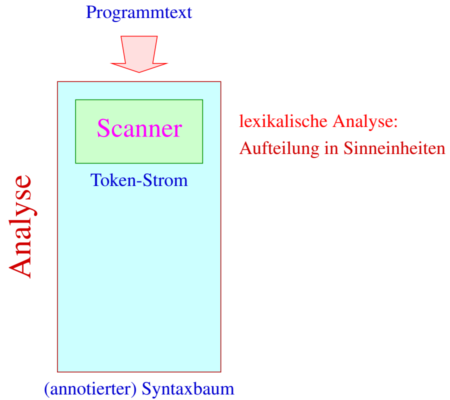
Übersetzer:

Die Analyse-Phase ist selbst unterteilt in mehrere Schritte



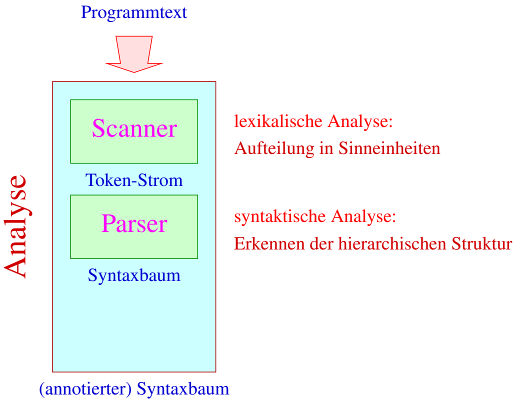
Übersetzer:

Die Analyse-Phase ist selbst unterteilt in mehrere Schritte



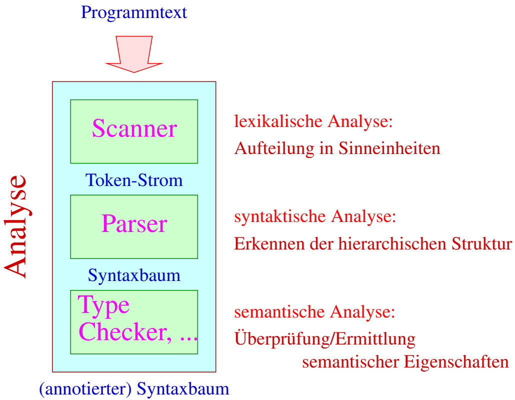
Übersetzer:

Die Analyse-Phase ist selbst unterteilt in mehrere Schritte



Übersetzer:

Die Analyse-Phase ist selbst unterteilt in mehrere Schritte



Themengebiet:

Lexikalische Analyse

Die lexikalische Analyse

Die lexikalische Analyse

Die lexikalische Analyse

- Ein Token ist eine Folge von Zeichen, die zusammen eine Einheit bilden.
- Tokens werden in Klassen zusammen gefasst. Zum Beispiel:

$\rightarrow$ Namen (Identifier) wie `xyz`, `pi`, ...

$\rightarrow$ Konstanten wie `42`, `3.14`, `"abc"`, ...

$\rightarrow$ Operatoren wie `+`, ...

$\rightarrow$ reservierte Worte wie `if`, `int`, ...

Die lexikalische Analyse

- Ein Token ist eine Folge von Zeichen, die zusammen eine Einheit bilden.
- Tokens werden in Klassen zusammen gefasst. Zum Beispiel:

  $\rightarrow$ Namen (Identifier) wie `xyz`, `pi`, ...

  $\rightarrow$ Konstanten wie `42`, `3.14`, `"abc"`, ...

  $\rightarrow$ Operatoren wie `+`, ...

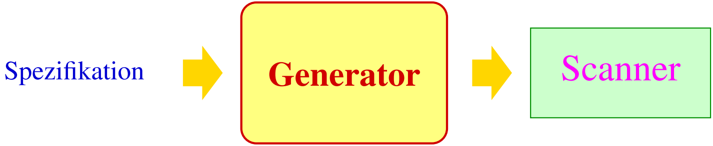
  $\rightarrow$ reservierte Worte wie `if`, `int`, ...

Sind Tokens erst einmal klassifiziert, werden diese mittels des Siebers vorverarbeitet:

- Wegwerfen irrelevanter Teile wie Leerzeichen, Kommentare, etc.
- Aussondern von Pragmas, d.h. Direktiven an den Compiler, die nicht Teil des Programms sind, wie include-Anweisungen.
- Ersetzen der Token bestimmter Klassen durch ihre Bedeutung / Interndarstellung, etwa bei:
  - → Konstanten;
  - → Namen: die typischerweise zentral in einer Symbol-Tabelle verwaltet, evt. mit reservierten Worten verglichen (soweit nicht vom Scanner bereits vorgenommen) und gegebenenfalls durch einen Index ersetzt werden.

Diskussion:

- Scanner und Sieber werden i.a. in einer Komponente zusammen gefasst, indem man dem Scanner nach Erkennen eines Tokens gestattet, eine Aktion auszuführen
- Scanner werden i.a. nicht von Hand programmiert, sondern aus einer Spezifikation automatisch generiert:



- Einige bekannt Scanner-Generatoren: lex, Flex, JFlex

Vorteile:

Produktivität: Die Komponente lässt sich schneller herstellen.

Korrektheit: Die Komponente realisiert (beweisbar) die Spezifikation.

Effizienz: Der Generator kann die erzeugte Programmkomponente mit den effizientesten Algorithmen ausstatten.

Vorteile:

Produktivität: Die Komponente lässt sich schneller herstellen.

Korrektheit: Die Komponente realisiert (beweisbar) die Spezifikation.

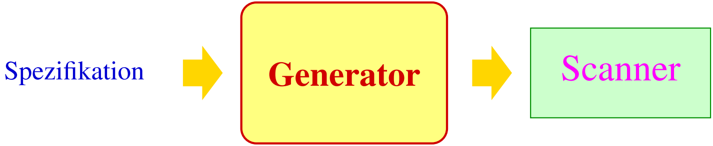
Effizienz: Der Generator kann die erzeugte Programmkomponente mit den effizientesten Algorithmen ausstatten.

Einschränkungen:

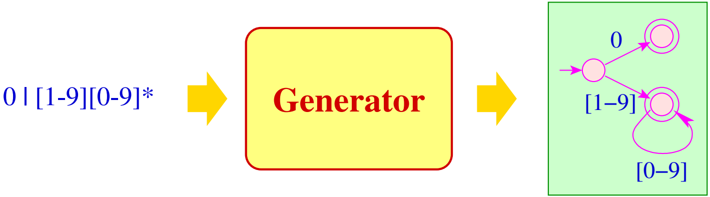
→ Spezifizieren ist auch Programmieren — nur eventuell einfacher.

→ Generierung statt Implementierung lohnt sich nur für Routine-Aufgaben und ist nur für Probleme möglich, die sehr gut verstanden sind.

... in unserem Fall:



... in unserem Fall:



Spezifikation von Token-Klassen: Reguläre Ausdrücke;

Generierte Implementierung: Endliche Automaten + X

Kapitel 1:

Grundlagen: Reguläre Ausdrücke

Grundlagen: Reguläre Ausdrücke

- Programmtext benutzt ein endliches Alphabet Σ von Eingabe-Zeichen, z.B. ASCII.
- Die Menge der Textabschnitte einer Token-Klasse ist i.a. regulär.
- Reguläre Sprachen kann man mithilfe regulärer Ausdrücke spezifizieren.

Grundlagen: Reguläre Ausdrücke

- Programmtext benutzt ein endliches Alphabet Σ von Eingabe-Zeichen, z.B. ASCII.
- Die Menge der Textabschnitte einer Token-Klasse ist i.a. regulär.
- Reguläre Sprachen kann man mithilfe regulärer Ausdrücke spezifizieren.

Die Menge $\mathcal{E}_\Sigma$ der (nicht-leeren) regulären Ausdrücke ist die kleinste Menge $\mathcal{E}$ mit:

- $\epsilon \in \mathcal{E}$ (ϵ neues Symbol nicht aus Σ);
- $a \in \mathcal{E}$ für alle $a \in \Sigma$;
- $(e_1 \mid e_2), (e_1 \cdot e_2), e_1{}^* \in \mathcal{E}$ sofern $e_1, e_2 \in \mathcal{E}$.

Stephen Kleene, Madison Wisconsin, 1909-1994

Beispiele:

$$((a \cdot b^*) \cdot a)$$
$$(a \mid b)$$
$$((a \cdot b) \cdot (a \cdot b))$$

Beispiele:

$$((a \cdot b^*) \cdot a)$$
$$(a \mid b)$$
$$((a \cdot b) \cdot (a \cdot b))$$

Achtung:

- Wir unterscheiden zwischen Zeichen $a, b, 0$,... und Meta-Zeichen $(, |,)$,...
- Um (hässliche) Klammern zu sparen, benutzen wir Operator-Präzedenzen:

$$* > \cdot > |$$

und lassen "$\cdot$" weg

Beispiele:

$$((a \cdot b^*) \cdot a)$$
$$(a \mid b)$$
$$((a \cdot b) \cdot (a \cdot b))$$

Achtung:

- Wir unterscheiden zwischen Zeichen $a, b, 0$,... und Meta-Zeichen $(, |,)$,...
- Um (hässliche) Klammern zu sparen, benutzen wir Operator-Präzedenzen:

  $$^* > \cdot > |$$

  und lassen "$\cdot$" weg
- Reale Spezifikations-Sprachen bieten zusätzliche Konstrukte wie:

  $$\begin{array}{lcl} e? & \equiv & (\epsilon \mid e) \\ e^+ & \equiv & (e \cdot e^*) \end{array}$$

  und verzichten auf "ϵ"

Spezifikationen benötigen eine Semantik
Im Beispiel:

Spezifikation	Semantik
ab^*a	$\{ab^na \mid n \geq 0\}$
$a \mid b$	$\{a, b\}$
$abab$	$\{abab\}$

Für $e \in \mathcal{E}_\Sigma$ definieren wir die spezifizierte Sprache $[\![e]\!] \subseteq \Sigma^*$ induktiv durch:

$$\begin{array}{lcl} [\![\epsilon]\!] & = & \{\epsilon\} \\ [\![a]\!] & = & \{a\} \\ [\![e^*]\!] & = & ([\![e]\!])^* \\ [\![e_1|e_2]\!] & = & [\![e_1]\!] \cup [\![e_2]\!] \\ [\![e_1 \cdot e_2]\!] & = & [\![e_1]\!] \cdot [\![e_2]\!] \end{array}$$

Beachte:

- Die Operatoren $(\_)^*, \cup, \cdot$ sind die entsprechenden Operationen auf Wort-Mengen:

$$\begin{array}{lll} (L)^* & = & \{w_1 \cdots w_k \mid k \geq 0, w_i \in L\} \\ L_1 \cdot L_2 & = & \{w_1 w_2 \mid w_1 \in L_1, w_2 \in L_2\} \end{array}$$

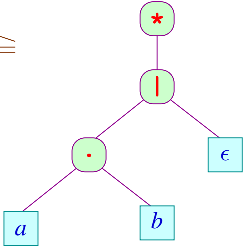
Beachte:

- Die Operatoren $(\_)^*, \cup, \cdot$ sind die entsprechenden Operationen auf Wort-Mengen:

$$
\begin{array}{lll}
(L)^* & = & \{w_1 \cdots w_k \mid k \geq 0, w_i \in L\} \\
L_1 \cdot L_2 & = & \{w_1 w_2 \mid w_1 \in L_1, w_2 \in L_2\}
\end{array}
$$

- Reguläre Ausdrücke stellen wir intern als markierte geordnete Bäume dar:

$(ab|\epsilon)^*$ $\widehat{=}$



Innere Knoten: Operator-Anwendungen;
Blätter: einzelne Zeichen oder ϵ.

Anwendung:

Identifier in Java:

```
le = [a-z A-Z _ \$]
di = [0-9]
Id = {le} ({le} | {di})*
```

Anwendung:

Identifier in Java:

```
le = [a-z A-Z _ \$]
di = [0-9]
Id = {le} ({le} | {di})*

Float = {di}* (\.{di}|{di}\.) {di}*((e|E)(\+|\-)?{di}+)?
```

Beispiel: $11.345\mathrm{-E45}$ steht für $11,345 \cdot 10^{-45}$.

Anwendung:

Identifier in Java:

```
le = [a-z A-Z _ \$]
di = [0-9]
Id = {le} ({le} | {di})*

Float = {di}* (\.{di}|{di}\.) {di}*((e|E)(\+|\-)?{di}+)?
```

Beispiel: $11.345{-}E45$ steht für $11,345 \cdot 10^{-45}$.

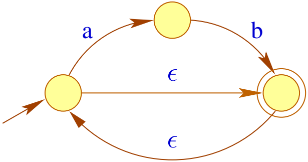
Bemerkungen:

- "`le`" und "`di`" sind Zeichenklassen.
- Definierte Namen werden in "{", "}" eingeschlossen.
- Zeichen werden von Meta-Zeichen durch "\" unterschieden.

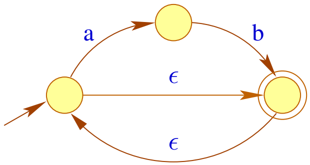
Kapitel 2:

Grundlagen: Endliche Automaten

Beispiel:



Beispiel:



Knoten: Zustände;

Kanten: Übergänge;

Beschriftungen: konsumierter Input

Michael O. Rabin, Stanford University

Dana S. Scott, Carnegy Mellon University, Pittsburgh

Definition

Formal ist ein nicht-deterministischer endlicher Automat mit ϵ-Übergängen (ϵ-NFA) ein Tupel $A = (Q, \Sigma, \delta, I, F)$ wobei:

Q	eine endliche Menge von Zuständen;
Σ	ein endliches Eingabe-Alphabet;
$I \subseteq Q$	die Menge der Anfangszustände;
$F \subseteq Q$	die Menge der Endzustände und
δ	die Menge der Übergänge (die Übergangs-Relation) ist.

Definition

Formal ist ein nicht-deterministischer endlicher Automat mit ϵ-Übergängen (ϵ-NFA) ein Tupel $A = (Q, \Sigma, \delta, I, F)$ wobei:

Q	eine endliche Menge von Zuständen;
Σ	ein endliches Eingabe-Alphabet;
$I \subseteq Q$	die Menge der Anfangszustände;
$F \subseteq Q$	die Menge der Endzustände und
δ	die Menge der Übergänge (die Übergangs-Relation) ist.

Für ϵ-NFAs ist:

$$\delta \quad \subseteq \quad Q \times (\Sigma \cup \{\epsilon\}) \times Q$$

Definition

Formal ist ein nicht-deterministischer endlicher Automat mit ϵ-Übergängen (ϵ-NFA) ein Tupel $A = (Q, \Sigma, \delta, I, F)$ wobei:

Q	eine endliche Menge von Zuständen;
Σ	ein endliches Eingabe-Alphabet;
$I \subseteq Q$	die Menge der Anfangszustände;
$F \subseteq Q$	die Menge der Endzustände und
δ	die Menge der Übergänge (die Übergangs-Relation) ist.

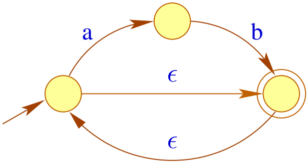
Für ϵ-NFAs ist:

$$\delta \quad \subseteq \quad Q \times (\Sigma \cup \{\epsilon\}) \times Q$$

- Gibt es keine ϵ-Übergänge (p, ϵ, q), ist A ein NFA.
- Ist $\delta : Q \times \Sigma \to Q$ eine Funktion und $|I| = 1$, heißt A deterministisch (DFA).

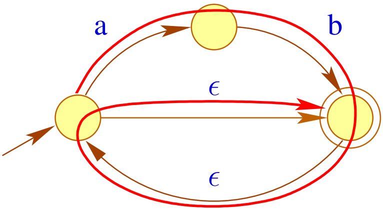
Akzeptierung

- Berechnungen sind Pfade im Graphen.
- akzeptierende Berechnungen führen von I nach F .
- Ein akzeptiertes Wort ist die Folge der Symbole entlang eines akzeptierenden Pfades.



Akzeptierung

- Berechnungen sind Pfade im Graphen.
- akzeptierende Berechnungen führen von I nach F .
- Ein akzeptiertes Wort ist die Folge der Symbole entlang eines akzeptierenden Pfades.



- Dazu definieren wir den reflexiv transitiven Abschluss δ^* von δ als kleinste Menge $\delta' \subseteq Q \times \Sigma^* \times Q$ mit (wobei $x \in \Sigma \cup \{\epsilon\}, w \in \Sigma^*$):
  - $(p, \epsilon, p) \in \delta'$ für alle $p \in Q$ und
  - $(p, xw, q) \in \delta'$ sofern $\exists p_1 \in Q : (p, x, p_1) \in \delta \;\wedge\; (p_1, w, q) \in \delta'$.

  δ^* beschreibt für je zwei Zustände, mit welchen Wörtern man vom einen zum andern kommt.

- Die Menge aller akzeptierten Worte, d.h. die von A akzeptierte Sprache können wir kurz beschreiben als:

$$\mathcal{L}(A) = \{w \in \Sigma^* \mid \exists i \in I \; \exists f \in F : (i, w, f) \in \delta^*\}$$

Umwandlung von Regex in NFA

Satz:

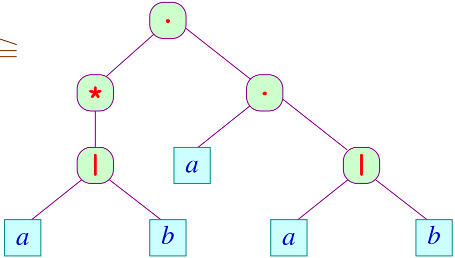
Für jeden regulären Ausdruck e kann (in linearer Zeit) ein ϵ-NFA konstruiert werden, der die Sprache $[\![e]\!]$ akzeptiert.

Idee:

Der Automat verfolgt (konzepionell mithilfe einer Marke "•"), wohin man in e mit der Eingabe w gelangen kann.

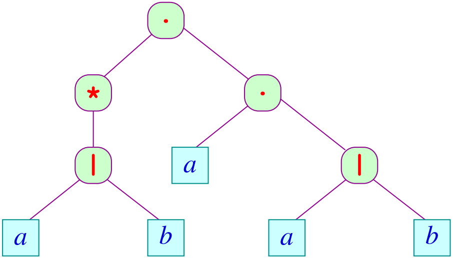
Beispiel:

$$(a|b)^*a(a|b) \quad \widehat{=}$$



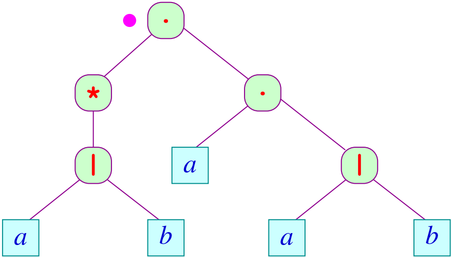
Beispiel:

$w = bbaa$:



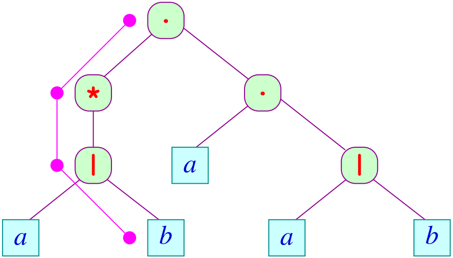
Beispiel:

$w = bbaa$:



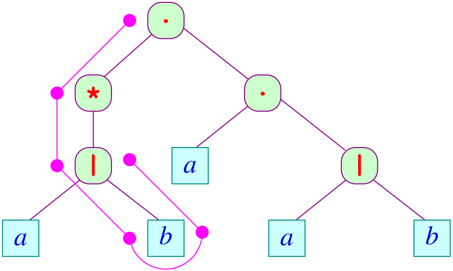
Beispiel:

$w = bbaa$:



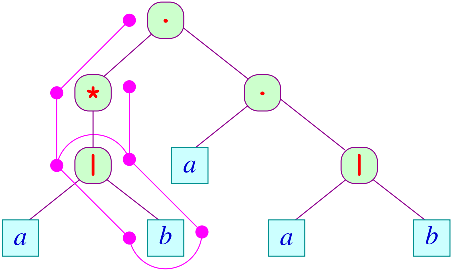
Beispiel:

$w = bbaa$:



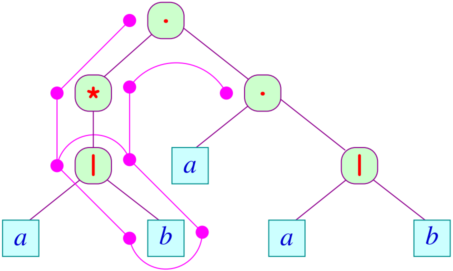
Beispiel:

$w = bbaa$:



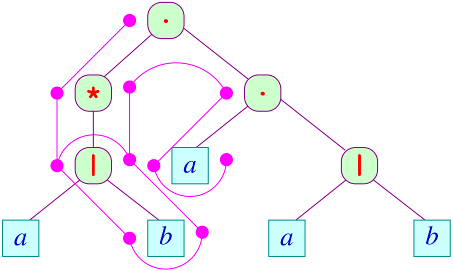
Beispiel:

$w = bbaa$:



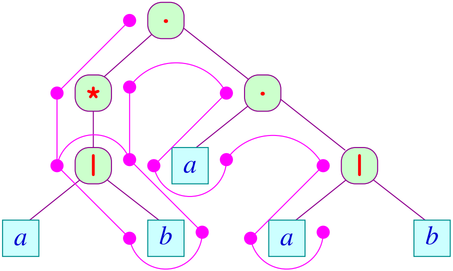
Beispiel:

$$w = bbaa \quad :$$



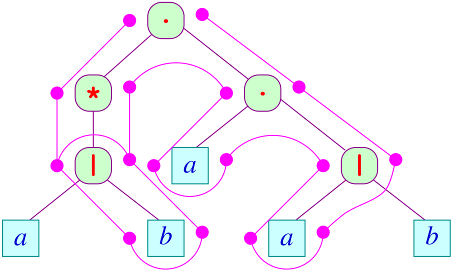
Beispiel:

$w = bbaa$:



Beispiel:

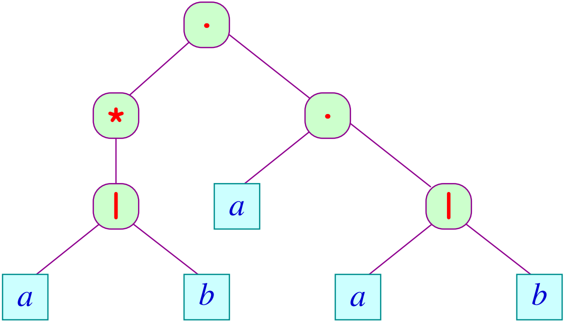
$w \quad = \quad bbaa \quad :$



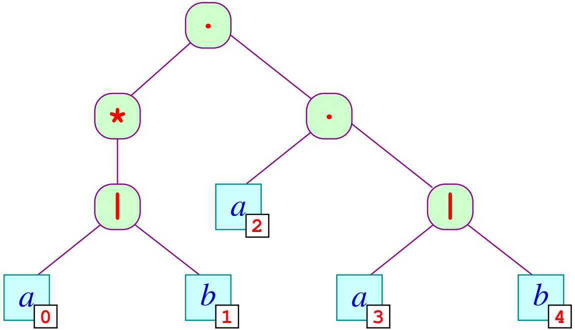
Beachte:

- Gelesen wird nur an den Blättern.
- Die Navigation im Baum erfolgt ohne Lesen, d.h. mit ϵ-Übergängen.
- Für eine formale Konstruktion müssen wir die Knoten im Baum bezeichnen.
- Dazu benutzen wir (hier) einfach den dargestellten Teilausdruck.
- Leider gibt es eventuell mehrere gleiche Teilausdrücke.
- Wir numerieren daher die Blätter durch.

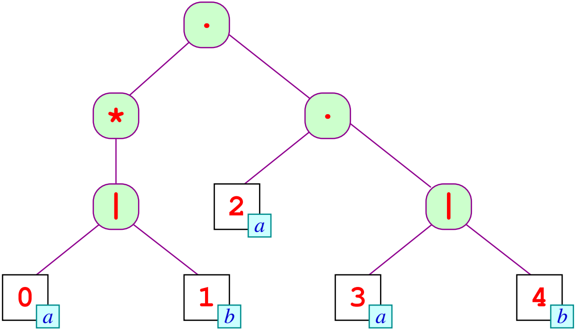
... im Beispiel:



... im Beispiel:



... im Beispiel:



Die Konstruktion:

Zustände: $\bullet r$ und $r \bullet$ für alle Knoten r von e

Anfangszustand: $\bullet e$

Endzustand: $e \bullet$

Übergangsrelation: Für Blätter $r \equiv \boxed{i \mid x}$ $(i \in \mathbb{N},\ x \in \Sigma \cup \{\epsilon\})$ benötigen wir: $(\bullet r, x, r \bullet)$.

Die übrigen Übergänge sind:

r	Übergänge
$r_1 \mid r_2$	$(\bullet r, \epsilon, \bullet r_1)$ $(\bullet r, \epsilon, \bullet r_2)$ $(r_1 \bullet, \epsilon, r \bullet)$ $(r_2 \bullet, \epsilon, r \bullet)$
$r_1 \cdot r_2$	$(\bullet r, \epsilon, \bullet r_1)$ $(r_1 \bullet, \epsilon, \bullet r_2)$ $(r_2 \bullet, \epsilon, r \bullet)$

r	Übergänge
r_1^*	$(\bullet r, \epsilon, r \bullet)$ $(\bullet r, \epsilon, \bullet r_1)$ $(r_1 \bullet, \epsilon, \bullet r_1)$ $(r_1 \bullet, \epsilon, r \bullet)$
$r_1?$	$(\bullet r, \epsilon, r \bullet)$ $(\bullet r, \epsilon, \bullet r_1)$ $(r_1 \bullet, \epsilon, r \bullet)$

Diskussion:

- Die meisten Übergänge dienen dazu, im Ausdruck zu navigieren.
- Der Automat ist i.a. nichtdeterministisch.

Diskussion:

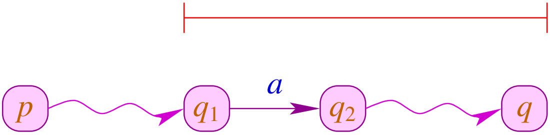
- Die meisten Übergänge dienen dazu, im Ausdruck zu navigieren.
- Der Automat ist i.a. nichtdeterministisch.

Ziel im Folgenden:

1. Beseitigung der ϵ-Übergänge;
2. Beseitigung des Nichtdeterminismus

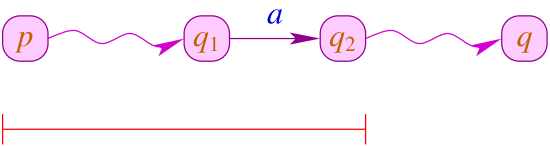
Beseitigung von ϵ-Übergängen:

Zwei einfache Ansätze:



Beseitigung von ϵ-Übergängen:

Zwei einfache Ansätze:

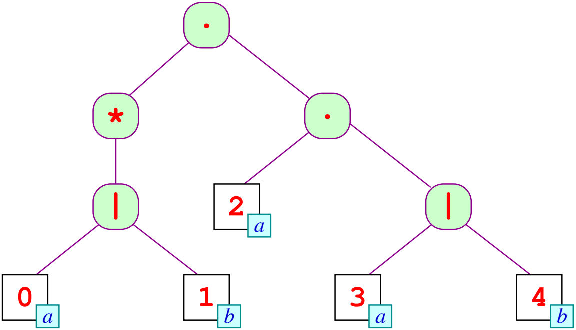


Wir benutzen hier den zweiten Ansatz.
Zur Konstruktion von Parsern werden wir später den ersten benutzen.

1. Schritt:

$\text{empty}[r] = t \quad \text{gdw.} \quad \epsilon \in [\![r]\!]$

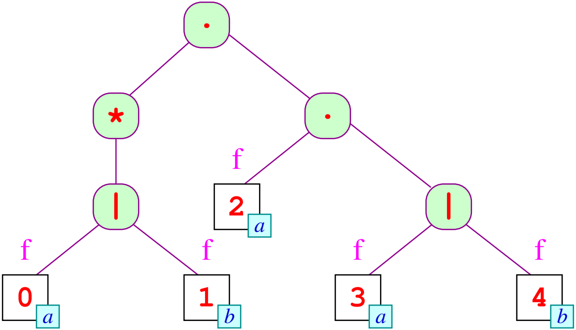
Im Beispiel:



1. Schritt:

$\text{empty}[r] = t$ gdw. $\epsilon \in [\![r]\!]$

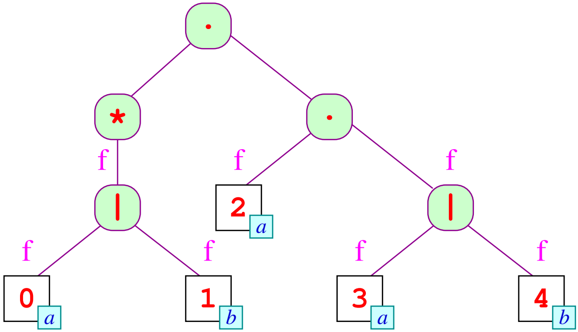
Im Beispiel:



1. Schritt:

$\textsf{empty}[r] = t \quad \text{gdw.} \quad \epsilon \in [\![r]\!]$

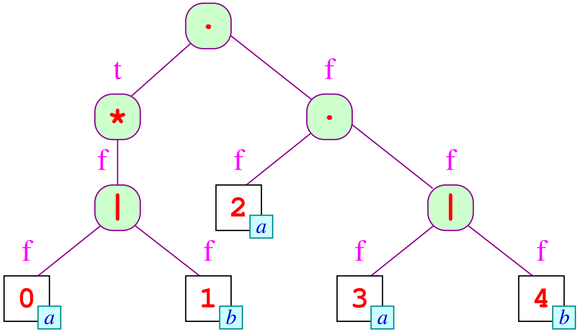
Im Beispiel:



1. Schritt:

$$\text{empty}[r] = t \quad \text{gdw.} \quad \epsilon \in [\![r]\!]$$

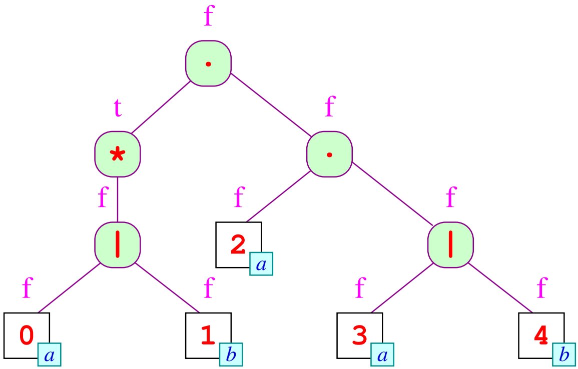
Im Beispiel:



1. Schritt:

$\text{empty}[r] = t$ gdw. $\epsilon \in [\![r]\!]$

Im Beispiel:



Implementierung mittels bottom-up Auswertung: von Blättern zur Wurzel hocharbeiten.

Für Blätter $r \equiv \boxed{i \mid x}$ ist $\text{empty}[r] = \begin{cases} t & \text{falls } x = \epsilon \\ f & \text{falls } x \in \Sigma. \end{cases}$

Andernfalls:

$$\begin{aligned}
\text{empty}[r_1 \mid r_2] &= \text{empty}[r_1] \vee \text{empty}[r_2] \\
\text{empty}[r_1 \cdot r_2] &= \text{empty}[r_1] \wedge \text{empty}[r_2] \\
\text{empty}[r_1^*] &= t \\
\text{empty}[r_1?] &= t
\end{aligned}$$

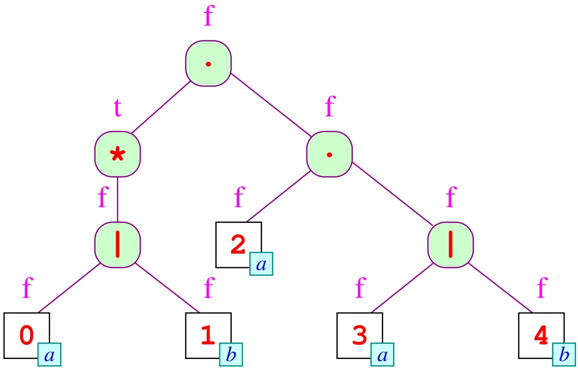
2. Schritt:

Menge erster Blätter (δ^* bezieht sich auf den ϵ-NFA von Folie 30):

$$\text{first}[r] = \{i \text{ in } r \mid (\bullet r, \epsilon, \bullet\boxed{i \mid x}) \in \delta^*, x \in \Sigma\}$$

Beachte: $\text{first}[r]$ enthält nur Blätter, die im Teilausdruck r liegen.

Im Beispiel:



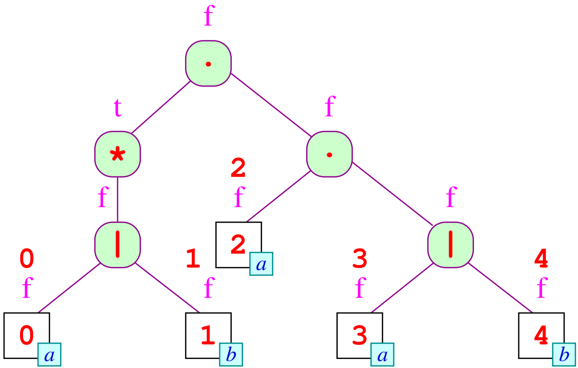
2. Schritt:

Menge erster Blätter (δ^* bezieht sich auf den ϵ-NFA von Folie 30):

$$\text{first}[r] = \{i \text{ in } r \mid (\bullet r, \epsilon, \bullet\boxed{i \mid x}) \in \delta^*, x \in \Sigma\}$$

Beachte: first$[r]$ enthält nur Blätter, die im Teilausdruck r liegen.

Im Beispiel:



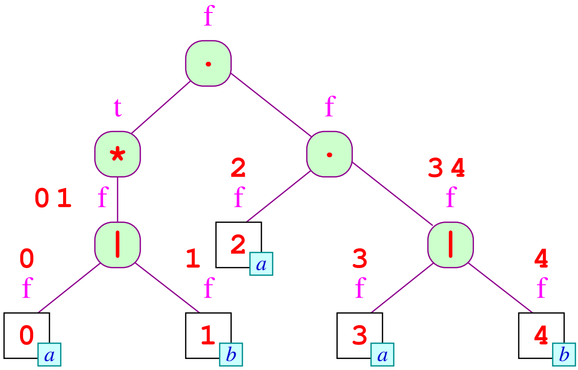
2. Schritt:

Menge erster Blätter (δ^* bezieht sich auf den ϵ-NFA von Folie 30):

$$\text{first}[r] = \{i \text{ in } r \mid (\bullet r, \epsilon, \bullet\boxed{i \mid x}) \in \delta^*, x \in \Sigma\}$$

Beachte: $\text{first}[r]$ enthält nur Blätter, die im Teilausdruck r liegen.

Im Beispiel:



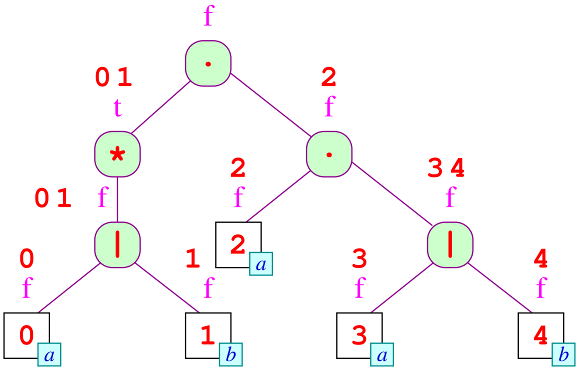
2. Schritt:

Menge erster Blätter (δ^* bezieht sich auf den ϵ-NFA von Folie 30):

$$\text{first}[r] = \{i \text{ in } r \mid (\bullet r, \epsilon, \bullet\boxed{i \mid x}) \in \delta^*, x \in \Sigma\}$$

Beachte: first$[r]$ enthält nur Blätter, die im Teilausdruck r liegen.

Im Beispiel:



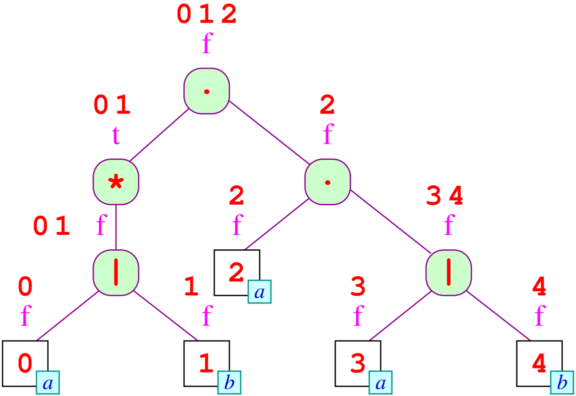
2. Schritt:

Menge erster Blätter (δ^* bezieht sich auf den ϵ-NFA von Folie 30):

$$\text{first}[r] = \{i \text{ in } r \mid (\bullet r, \epsilon, \bullet\boxed{i \mid x}) \in \delta^*, x \in \Sigma\}$$

Beachte: first$[r]$ enthält nur Blätter, die im Teilausdruck r liegen.

Im Beispiel:



Implementierung mittels bottom-up Auswertung: von Blättern zur Wurzel hocharbeiten.

Für Blätter $r \equiv \boxed{i \mid x}$ ist $\text{first}[r] = \begin{cases} \{i\} & \text{falls } x \in \Sigma \\ \emptyset & \text{falls } x = \epsilon. \end{cases}$

Andernfalls:

$$
\begin{aligned}
\text{first}[r_1 \mid r_2] &= \text{first}[r_1] \cup \text{first}[r_2] \\
\text{first}[r_1 \cdot r_2] &= \begin{cases} \text{first}[r_1] \cup \text{first}[r_2] & \text{falls} \quad \text{empty}[r_1] = t \\ \text{first}[r_1] & \text{falls} \quad \text{empty}[r_1] = f \end{cases} \\
\text{first}[r_1^*] &= \text{first}[r_1] \\
\text{first}[r_1?] &= \text{first}[r_1]
\end{aligned}
$$

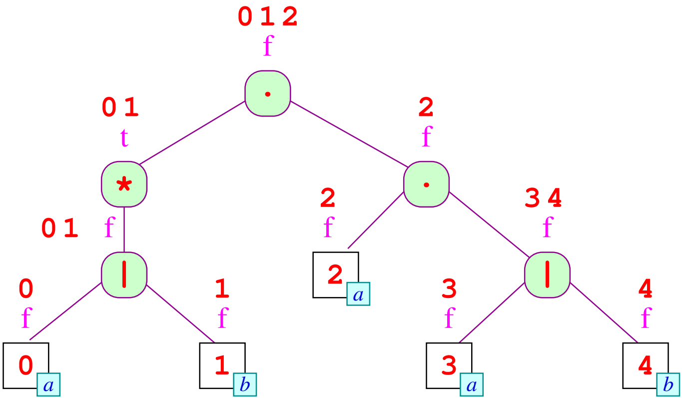
3. Schritt:

Menge nächster Blätter (δ^* bezieht sich auf den ϵ-NFA von Folie 30):

$$\text{next}[r] = \{i \mid (r\bullet, \epsilon, \bullet\boxed{i \mid x}) \in \delta^*, x \neq \epsilon\}$$

$\text{next}[r]$ kann auch Blätter außerhalb des Teilausdrucks r enthalten.

Im Beispiel:



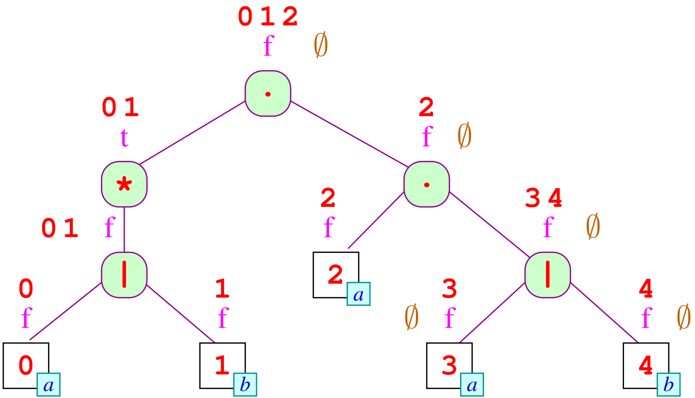
3. Schritt:

Menge nächster Blätter (δ^* bezieht sich auf den ϵ-NFA von Folie 30):

$$\text{next}[r] = \{i \mid (r\bullet, \epsilon, \bullet\boxed{i \mid x}) \in \delta^*, x \neq \epsilon\}$$

next$[r]$ kann auch Blätter außerhalb des Teilausdrucks r enthalten.

Im Beispiel:



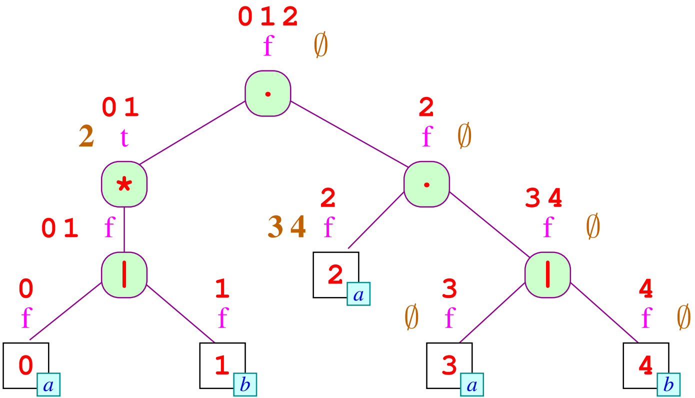
3. Schritt:

Menge nächster Blätter (δ^* bezieht sich auf den ϵ-NFA von Folie 30):

$$\text{next}[r] = \{i \mid (r\bullet, \epsilon, \bullet\boxed{i \mid x}) \in \delta^*, x \neq \epsilon\}$$

$\text{next}[r]$ kann auch Blätter außerhalb des Teilausdrucks r enthalten.

Im Beispiel:



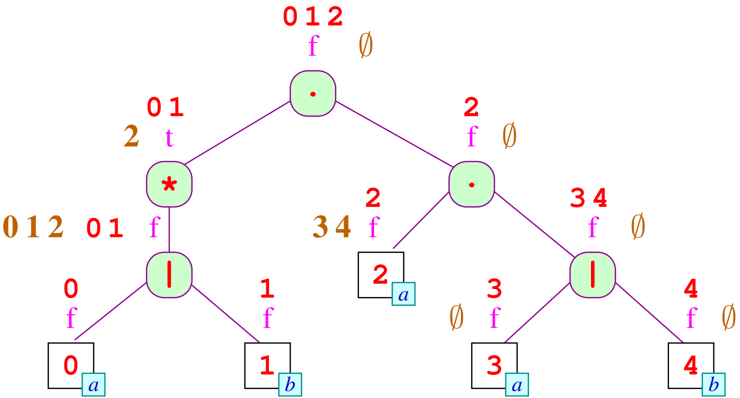
3. Schritt:

Menge nächster Blätter (δ^* bezieht sich auf den ϵ-NFA von Folie 30):

$$\text{next}[r] = \{i \mid (r\bullet, \epsilon, \bullet\boxed{i \mid x}) \in \delta^*, x \neq \epsilon\}$$

next$[r]$ kann auch Blätter außerhalb des Teilausdrucks r enthalten.

Im Beispiel:



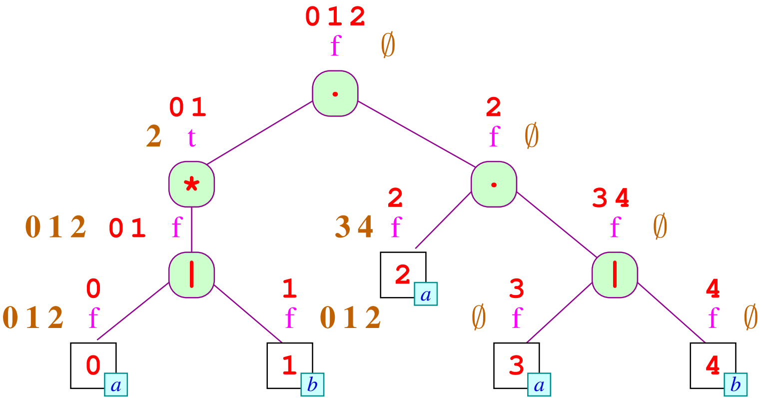
3. Schritt:

Menge nächster Blätter (δ^* bezieht sich auf den ϵ-NFA von Folie 30):

$$\text{next}[r] = \{i \mid (r\bullet, \epsilon, \bullet\boxed{i \mid x}) \in \delta^*, x \neq \epsilon\}$$

$\text{next}[r]$ kann auch Blätter außerhalb des Teilausdrucks r enthalten.

Im Beispiel:



Implementierung mittels top-down Auswertung: von der Wurzel zu den Blättern auswerten.

Für die Wurzel haben wir:

$$\text{next}[e] = \emptyset$$

Ansonsten machen wir eine Fallunterscheidung über den Kontext:

r	Regeln
$r_1 \mid r_2$	$\text{next}[r_1] = \text{next}[r]$ $\text{next}[r_2] = \text{next}[r]$
$r_1 \cdot r_2$	$\text{next}[r_1] = \begin{cases} \text{first}[r_2] \cup \text{next}[r] & \text{falls} \quad \text{empty}[r_2] = t \\ \text{first}[r_2] & \text{falls} \quad \text{empty}[r_2] = f \end{cases}$ $\text{next}[r_2] = \text{next}[r]$
r_1^*	$\text{next}[r_1] = \text{first}[r_1] \cup \text{next}[r]$
$r_1?$	$\text{next}[r_1] = \text{next}[r]$

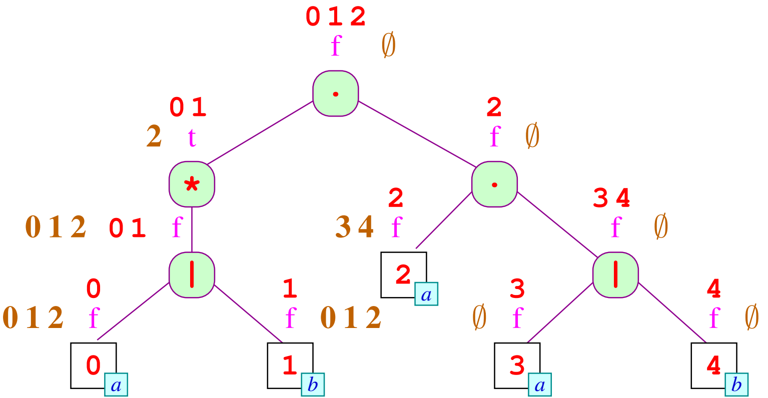
4. Schritt:

Menge letzter Blätter (δ^* bezieht sich auf den ϵ-NFA von Folie 30):

$$\text{last}[r] = \{i \text{ in } r \mid (\boxed{i \mid x}\bullet, \epsilon, r\bullet) \in \delta^*, x \neq \epsilon\}$$

Beachte: last$[r]$ enthält nur Blätter, die im Teilausdruck r liegen.

Im Beispiel:



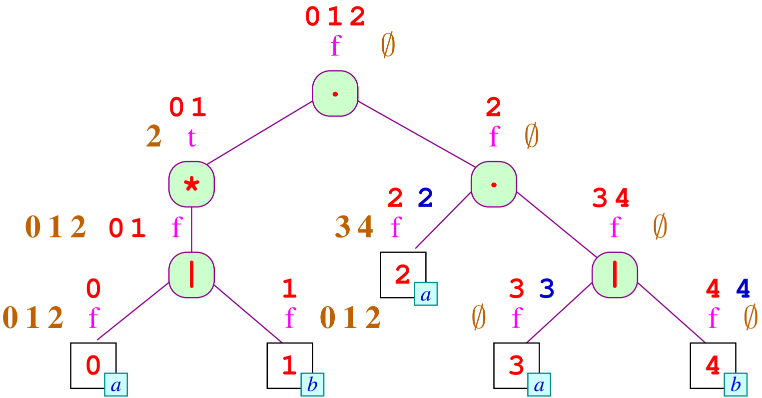
4. Schritt:

Menge letzter Blätter (δ^* bezieht sich auf den ϵ-NFA von Folie 30):

$$\text{last}[r] = \{i \text{ in } r \mid (\boxed{i \mid x}\bullet, \epsilon, r\bullet) \in \delta^*, x \neq \epsilon\}$$

Beachte: $\text{last}[r]$ enthält nur Blätter, die im Teilausdruck r liegen.

Im Beispiel:



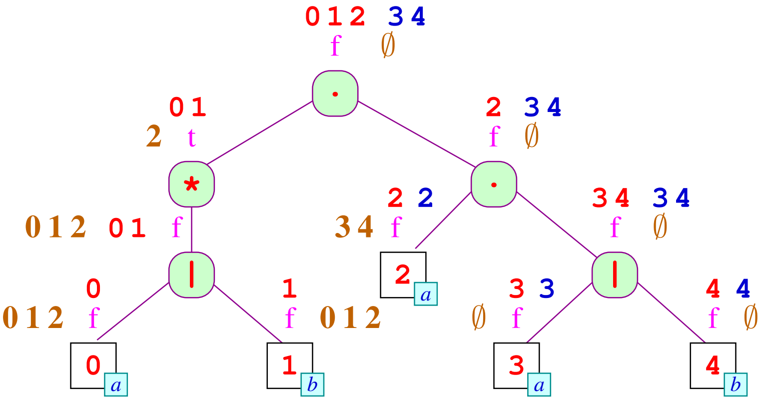
4. Schritt:

Menge letzter Blätter (δ^* bezieht sich auf den ϵ-NFA von Folie 30):

$$\text{last}[r] = \{i \text{ in } r \mid (\boxed{i \mid x}\bullet, \epsilon, r\bullet) \in \delta^*, x \neq \epsilon\}$$

Beachte: $\text{last}[r]$ enthält nur Blätter, die im Teilausdruck r liegen.

Im Beispiel:



Implementierung mittels bottom-up Auswertung: von Blättern zur Wurzel hocharbeiten.

Für Blätter $r \equiv \boxed{i \mid x}$ ist $\text{last}[r] = \begin{cases} \{i\} & \text{falls } x \in \Sigma \\ \emptyset & \text{falls } x = \epsilon. \end{cases}$

Andernfalls:

$$
\begin{array}{lcl}
\text{last}[r_1 \mid r_2] & = & \text{last}[r_1] \cup \text{last}[r_2] \\
\text{last}[r_1 \cdot r_2] & = & \begin{cases} \text{last}[r_1] \cup \text{last}[r_2] & \text{falls} \quad \text{empty}[r_2] = t \\ \text{last}[r_2] & \text{falls} \quad \text{empty}[r_2] = f \end{cases} \\
\text{last}[r_1^*] & = & \text{last}[r_1] \\
\text{last}[r_1?] & = & \text{last}[r_1]
\end{array}
$$

Integration:

Zustände: $\{q_0\} \uplus \{i \mid i$ Blatt in e, das nicht mit ε beschriftet ist.$\}$

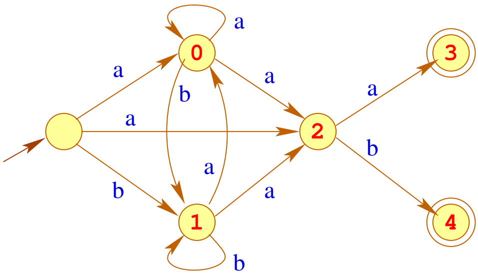
Startzustand: q_0

Endzustände: Falls empty$[e] = f$, dann last$[e]$.
Andernfalls: $\{q_0\} \uplus$ last$[e]$.

Übergänge: (q_0, a, i) falls $i \in$ first$[e]$ und i mit a beschriftet ist;
(i, a, i') falls $i' \in$ next$[i]$ und i' mit a beschriftet ist.

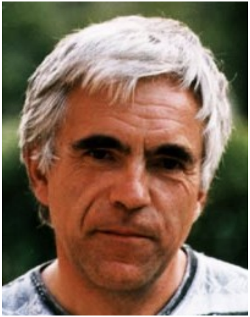
Den resultierenden Automaten bezeichnen wir mit A_e.

... im Beispiel:

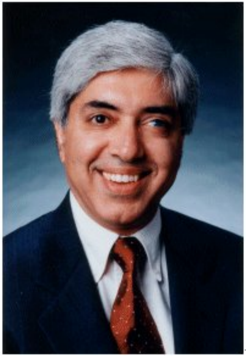


Bemerkung:

- Die Konstruktion heißt auch Berry-Sethi- oder Glushkow-Konstruktion.
- Sie wird in XML zur Definition von Content Models benutzt
- Das Ergebnis ist vielleicht nicht, was wir erwartet haben ...

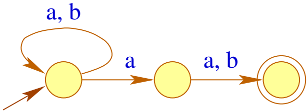


Gerard Berry, Esterel Technologies



Ravi Sethi, Research VR, Lucent Technologies

Der erwartete Automat:

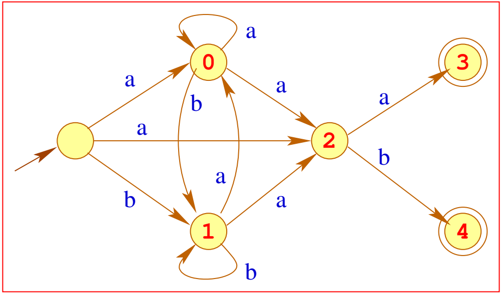


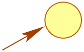
Bemerkung:

- Im Berry-Sethi-Automat haben alle in einen Zustand eingehenden Kanten die gleiche Beschriftung.
- Aber: Der Berry-Sethi-Automat ist nichtdeterministisch.
- Wir benötigen aber deterministische Automaten.

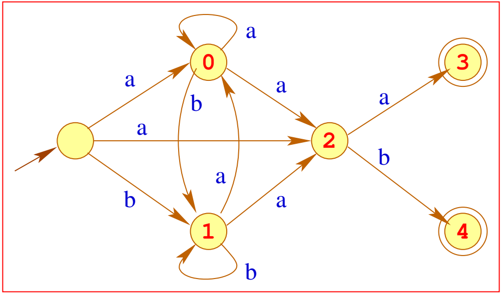
$\Longrightarrow$ Teilmengen-Konstruktion

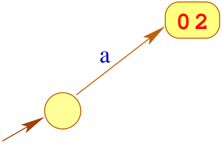
... im Beispiel:



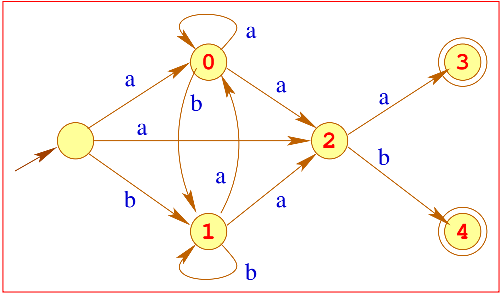


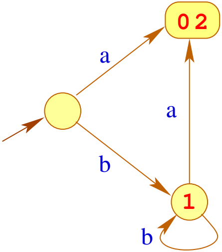
... im Beispiel:



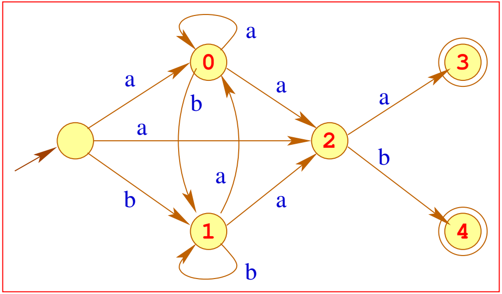


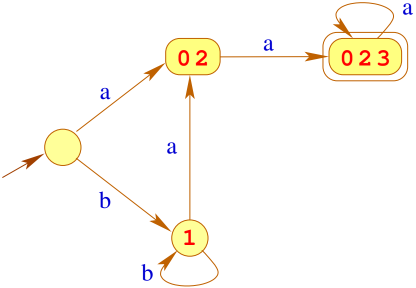
... im Beispiel:



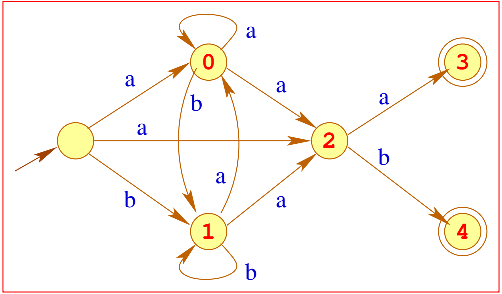


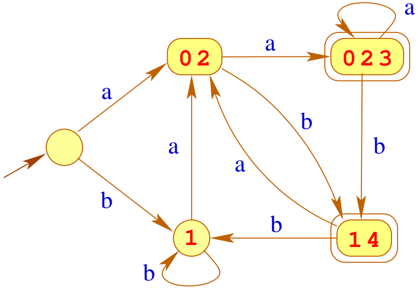
... im Beispiel:





... im Beispiel:





Teilmengenkonstruktion

Satz:

Zu jedem NFA $A = (Q, \Sigma, \delta, I, F)$ kann ein DFA $\mathcal{P}(A)$ konstruiert werden mit

$$\mathcal{L}(A) = \mathcal{L}(\mathcal{P}(A))$$

Teilmengenkonstruktion

Satz:

Zu jedem NFA $A = (Q, \Sigma, \delta, I, F)$ kann ein DFA $\mathcal{P}(A)$ konstruiert werden mit

$$\mathcal{L}(A) = \mathcal{L}(\mathcal{P}(A))$$

Konstruktion:

Zustände: Teilmengen von Q;

Anfangszustände: $\{I\}$;

Endzustände: $\{Q' \subseteq Q \mid Q' \cap F \neq \emptyset\}$;

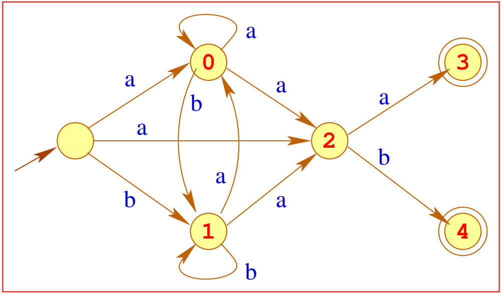
Übergangsfunktion: $\delta_{\mathcal{P}}(Q', a) = \{q \in Q \mid \exists p \in Q' : \ (p, a, q) \in \delta\}$.

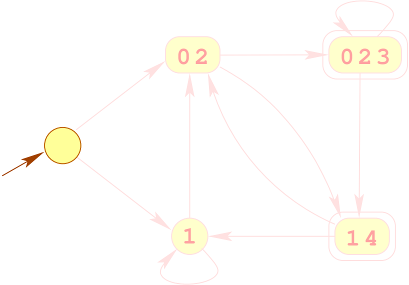
Achtung:

- Leider gibt es exponentiell viele Teilmengen von Q
- Um nur nützliche Teilmengen zu betrachten, starten wir mit der Menge $Q_{\mathcal{P}} = \{I\}$ und fügen weitere Zustände nur nach Bedarf hinzu ...
- d.h., wenn wir sie von einem Zustand in $Q_{\mathcal{P}}$ aus erreichen können
- Trotz dieser Optimierung kann der Ergebnisautomat riesig sein ... was aber in der Praxis (so gut wie) nie auftritt
- In Tools wie `grep` wird deshalb der DFA zu einem regulären Ausdruck nicht aufgebaut !
- Stattdessen werden während der Abbarbeitung der Eingabe genau die Mengen konstruiert, die für die Eingabe notwendig sind ...

... im Beispiel:

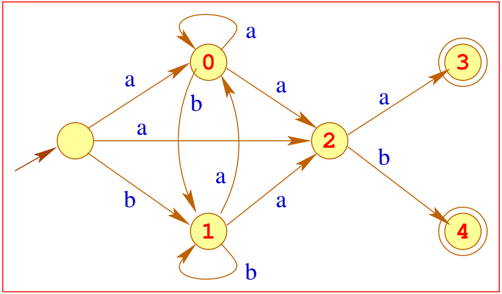
a	b	a	b

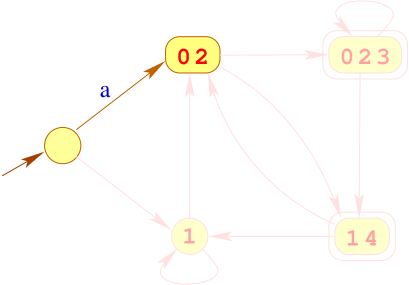




... im Beispiel:

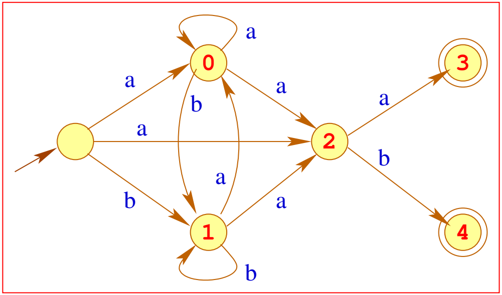
a	b	a	b

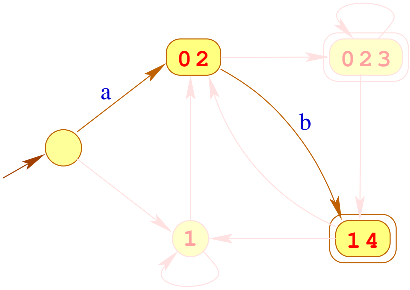




... im Beispiel:

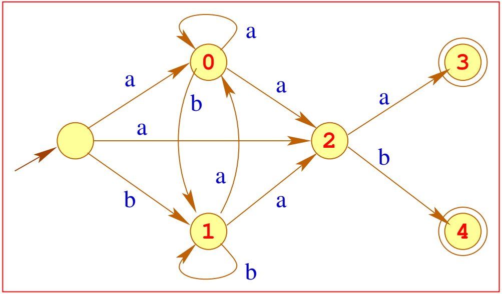
a	b	a	b

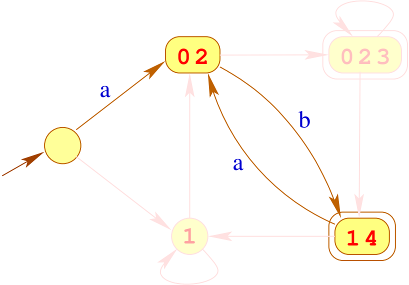




... im Beispiel:

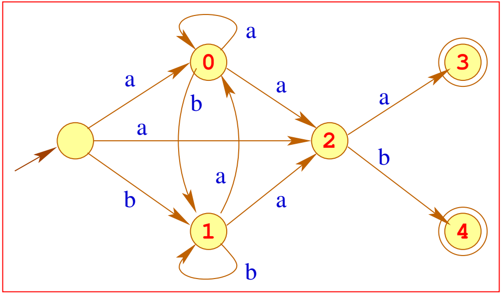
a	b	a	b

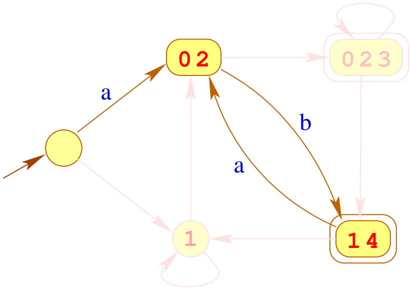




... im Beispiel:

a	b	a	b





Bemerkungen:

- Bei einem Eingabewort der Länge n werden maximal $n+1$ Mengen konstruiert
- Ist eine Menge bzw. eine Kante des DFA einmal konstuiert, heben wir sie in einer Hash-Tabelle auf.
- Bevor wir einen neuen Übergang konstruieren, sehen wir erst nach, ob wir diesen nicht schon haben

Bemerkungen:

- Bei einem Eingabewort der Länge n werden maximal $n + 1$ Mengen konstruiert
- Ist eine Menge bzw. eine Kante des DFA einmal konstuiert, heben wir sie in einer Hash-Tabelle auf.
- Bevor wir einen neuen Übergang konstruieren, sehen wir erst nach, ob wir diesen nicht schon haben

Zusammenfassend finden wir:

Satz:

Zu jedem regulären Ausdruck e kann ein deterministischer Automat $A = \mathcal{P}(A_e)$ konstruiert werden mit

$$\mathcal{L}(A) = [\![e]\!]$$

Kapitel 3:

Design eines Scanners

Design eines Scanners

Eingabe (vereinfacht): eine Menge von Regeln:

$$\begin{array}{ll} e_1 & \{\ \texttt{action}_1\ \} \\ e_2 & \{\ \texttt{action}_2\ \} \\ & \dots \\ e_k & \{\ \texttt{action}_k\ \} \end{array}$$

Design eines Scanners

Eingabe (vereinfacht): eine Menge von Regeln:

$$\begin{array}{ll} e_1 & \{\ \texttt{action}_1\ \} \\ e_2 & \{\ \texttt{action}_2\ \} \\ & \ldots \\ e_k & \{\ \texttt{action}_k\ \} \end{array}$$

Ausgabe: ein Programm, das

... von der Eingabe ein maximales Präfix w liest, das $e_1 \mid \ldots \mid e_k$ erfüllt;

... das minimale i ermittelt, so dass $w \in [\![e_i]\!]$;

... für w $\texttt{action}_i$ ausführt.

Wir gehen im weiteren davon aus, dass $\epsilon \notin [\![e_i]\!]$ gilt (macht in der Praxis Sinn: leeres Wort ist normalerweise kein gültiges Token).

Implementierung:

Idee:

- Konstruiere den DFA $\mathcal{P}(A_e) = (Q, \Sigma, \delta, \{q_0\}, F)$ zu dem Ausdruck $e = (e_1 \mid \ldots \mid e_k)$ (Potenzmengenautomat des Berry-Sethi-NFA);
- Beachte: $\text{last}[e] = \bigcup_{i=1}^{k} \text{last}[e_i]$ ist die Menge der Endzustände des Berry-Sethi-NFA
- Definiere die Mengen:

$$
\begin{array}{lcl}
F_1 & = & \{q \in F \mid q \cap \text{last}[e_1] \neq \emptyset\} \\
F_2 & = & \{q \in (F \backslash F_1) \mid q \cap \text{last}[e_2] \neq \emptyset\} \\
 & \ldots & \\
F_k & = & \{q \in (F \backslash (F_1 \cup \ldots \cup F_{k-1})) \mid q \cap \text{last}[e_k] \neq \emptyset\}
\end{array}
$$

  Dann ist $\bigcup_{i=1}^{k} F_i$ die Menge der Endzustände von $\mathcal{P}(A_e)$.
- Für Eingabe w gilt: $\delta^*(q_0, w) \in F_i$ genau dann wenn der Scanner für w $\texttt{action}_i$ ausführen soll

Lösung 1.

- Wir verwalten zwei Zeiger s und k in das Eingabewort w.
- In jedem Durchlauf einer **loop**-Schleife wird das nächste Token lokalisiert und die dafür vorgesehene Aktion ausgeführt.
- Dabei zeigt s stets auf den Anfang des Tokens und k wird solange nach rechts geschoben, wie der aktuelle Zustand noch $\neq \emptyset$ ist und das rechte Wortende noch nicht erreicht ist.
- Dabei merken wir uns immer in j die letzte Position, wo ein Endzustand erreicht wurde.
- Wenn der aktuelle Zustand schließlich $\emptyset$ ist oder das rechte Wortende erreicht wurde, brechen wir die Suche ab. Das nächste Token ist der Abschnitt $w[s, j-1]$ von Position s bis Position $j-1$.

Input: String $w \in \Sigma^+$
$s := 1; \quad k := 1$
loop
  $q := q_0; \quad p := \perp$
  while $k \leq |w|$ **and** $\delta(q, w[k]) \neq \emptyset$ **do**
    $q := \delta(q, w[k]); \quad k := k + 1$
    if $q \in F$ **then**
      $p := q; \;\; j := k$
    fi
  od
  if $p = \perp$ **then return (failure) fi**
  let i such that $p \in F_i$
  write($w[s, j - 1]$)
  action$_i$
  $s := j; \quad k := j$
  if $j = |w| + 1$ **then stop fi**
pool

Der Algorithmus auf der vorherigen Folie hat im Worst-Case eine Laufzeit von $O(|w|^2)$.

Beispiel:

$$\begin{aligned} e_1 &= ab \\ e_2 &= (ab)^* c \\ w &= (ab)^m \end{aligned}$$

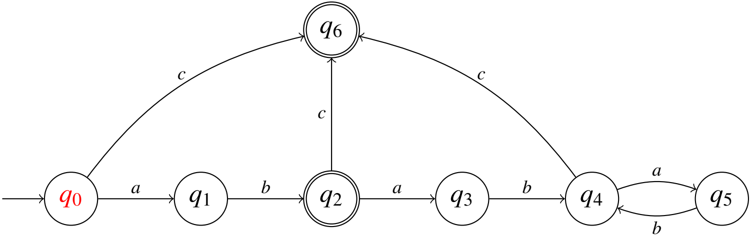
Dann durchläuft der Algorithmus m mal die **loop**-Schleife.

Im i-ten Durchlauf läuft der Zeiger k von Position $2(i-1)+1$ bis zum Wortende.

Also werden (bis auf einen konstanten Faktor)

$$\sum_{i=1}^{m}(2m - 2(i-1)) = 2\sum_{i=1}^{m} m - i + 1 = 2\sum_{i=1}^{m} i = m(m+1)$$

viele Schritte gemacht.



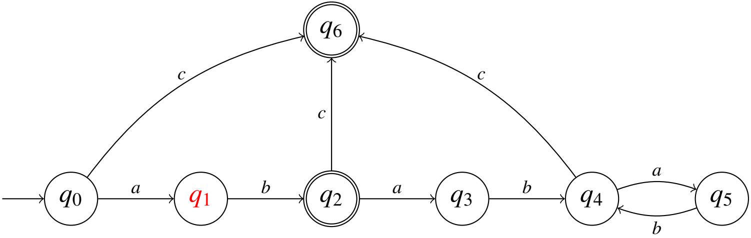
Alle undefinierten Übergänge führen zum Zustand $\emptyset$.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
s, k									
a	b	a	b	a	b	a	b	a	b

$q =$ q_0

$p = \perp$

$j =$

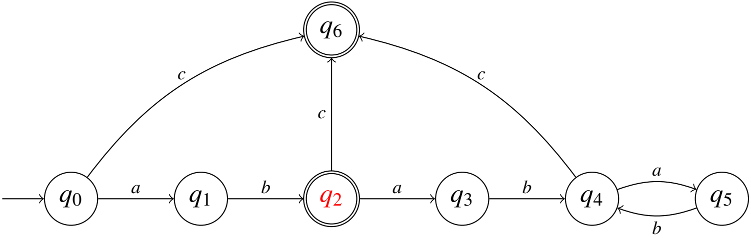


Alle undefinierten Übergänge führen zum Zustand $\emptyset$.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
	s	k								
	a	b	a	b	a	b	a	b	a	b
$q =$		q_1								

$p = \perp$

$j =$

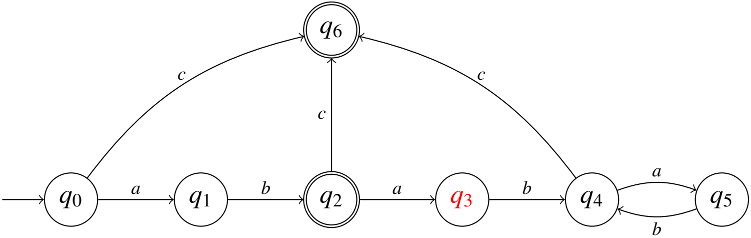


Alle undefinierten Übergänge führen zum Zustand $\emptyset$.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
	s		k							
	a	b	a	b	a	b	a	b	a	b
$q =$			q_2							

$p = q_2$

$j = 3$



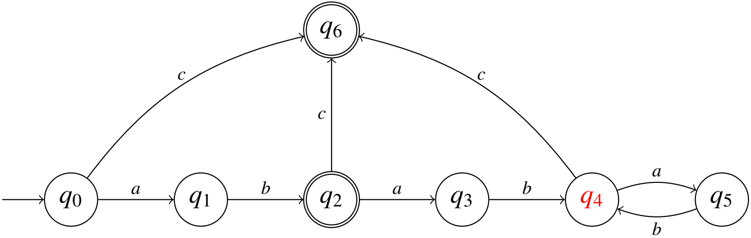
Alle undefinierten Übergänge führen zum Zustand $\emptyset$.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
s			k						
a	b	a	b	a	b	a	b	a	b

$q =$ q_3

$p = q_2$

$j = 3$

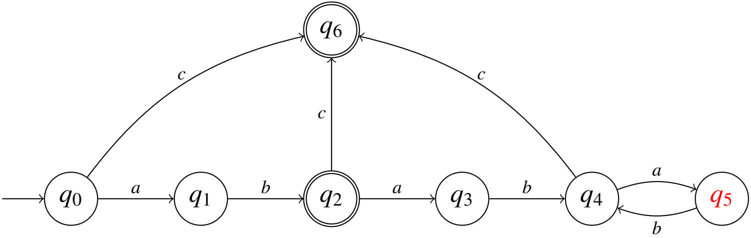


Alle undefinierten Übergänge führen zum Zustand $\emptyset$.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
	s				k					
	a	b	a	b	a	b	a	b	a	b
$q =$					q_4					

$p = q_2$

$j = 3$

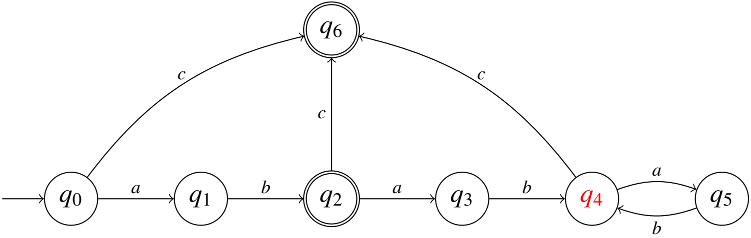


Alle undefinierten Übergänge führen zum Zustand $\emptyset$.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
	s					k				
	a	b	a	b	a	b	a	b	a	b
$q =$						q_5				

$p = q_2$

$j = 3$

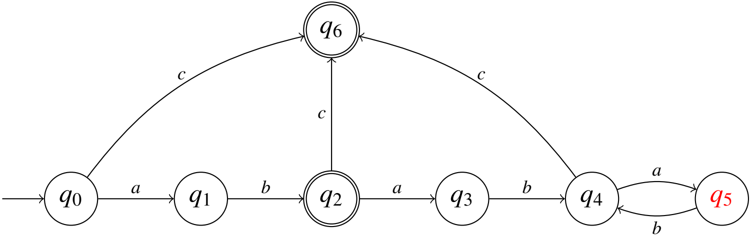


Alle undefinierten Übergänge führen zum Zustand $\emptyset$.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
	s						k			
	a	b	a	b	a	b	a	b	a	b
$q =$							q_4			

$p = q_2$

$j = 3$



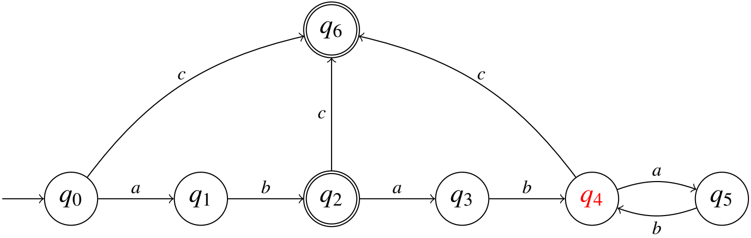
Alle undefinierten Übergänge führen zum Zustand $\emptyset$.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
s							k		
a	b	a	b	a	b	a	b	a	b

$q =$ $\quad q_5$

$p = q_2$

$j = 3$



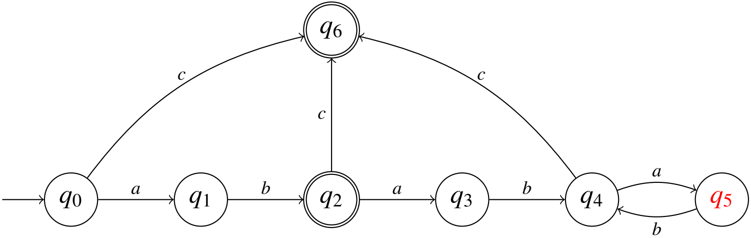
Alle undefinierten Übergänge führen zum Zustand $\emptyset$.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
s								k	
a	b	a	b	a	b	a	b	a	b
								q_4	

$q =$

$p = q_2$

$j = 3$

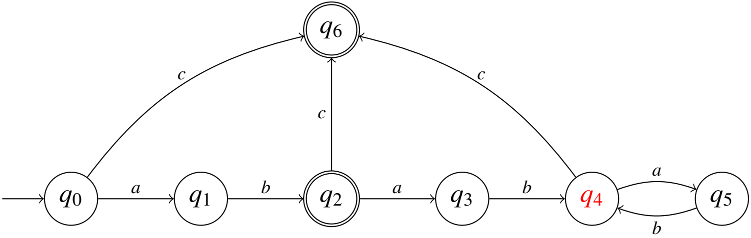


Alle undefinierten Übergänge führen zum Zustand $\emptyset$.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
	s									k
	a	b	a	b	a	b	a	b	a	b
$q =$										q_5

$p = q_2$

$j = 3$

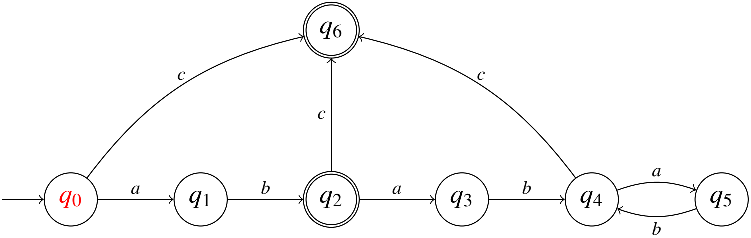


Alle undefinierten Übergänge führen zum Zustand $\emptyset$.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
	s										k
	a	b	a	b	a	b	a	b	a	b	
$q =$											q_4

$p = q_2$

$j = 3$



Alle undefinierten Übergänge führen zum Zustand $\emptyset$.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
		s, k							
a	b	a	b	a	b	a	b	a	b
		q_0							

$q =$

$p = \perp$

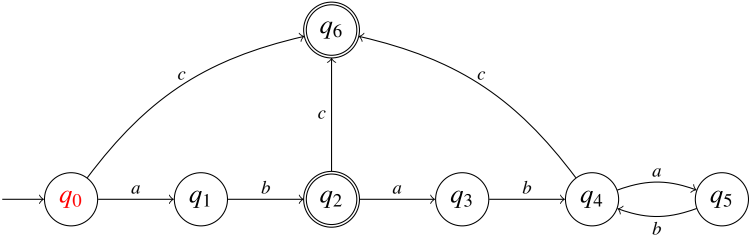
$j =$

Lösung 2. Reps Maximal-Munch-Algorithmus (Reps, 1998)
`https://dl.acm.org/doi/pdf/10.1145/276393.276394`

Idee:

- Der Algorithmus speichert für jede Position i in dem Wort und jeden Zustand $q \in Q$ des Automaten einen Wahrheitswert fehlversuch$[q, i]$.
- Dieses Bit (zu Beginn **false**) wird auf **true** gesetzt, sobald der Algorithmus feststellt, dass von Position i an beginnend mit Zustand q kein Endzustand erreicht werden kann.
- Wenn wir bei einer späteren Suche nach einem Token bei Position i im Zustand q ankommen, und fehlversuch$[q, i] =$ **true** gilt, können wir die Suche sofort abbrechen.
- Um das Array fehlversuch zu füllen, verwendet der Algorithmus eine Mengenvariable S, in die potentiale Kandidaten $\langle q, k \rangle$, für die fehlversuch auf true gesetzt werden könnte, eingefügt werden.
- Beachte nochmals: q_0 ist kein Endzustand!

```
Input: String w ∈ Σ⁺
s := 1; k := 1
for all q ∈ Q, i ∈ [1, |w| + 1] do fehlversuch[q, i] := false od
loop
   q := q₀;  p := ⊥;  S := {⟨q₀, k⟩}
   while k ≤ |w| and δ(q, w[k]) ≠ ∅ and fehlversuch[q, k] = true do
      q := δ(q, w[k]);  k := k + 1
      if q ∈ F then
         p := q;  j := k;  S := ∅
      else
         S := S ∪ {⟨q, k⟩}
      fi
   od
   if p = ⊥ then return (failure) fi
   for all ⟨q, k⟩ ∈ S do fehlversuch[q, k] := true od
   let i such that p ∈ F_i
   write (w[s, j − 1])
   action_i
   s := j,  k := j
   if j = |w| + 1 then stop fi
pool
```



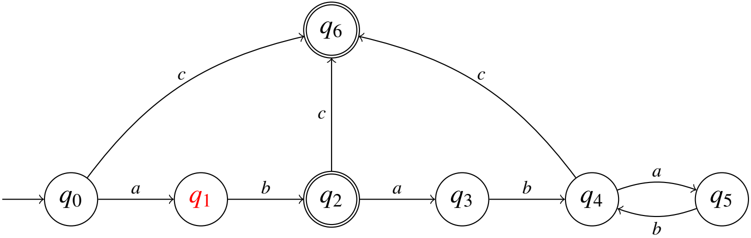
Alle undefinierten Übergänge führen zum Zustand $\emptyset$.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
s, k									
a	b	a	b	a	b	a	b	a	b

$q =$ q_0

$p = \perp$ $\quad S = \{\langle q_0, 1\rangle\}$

$j =$



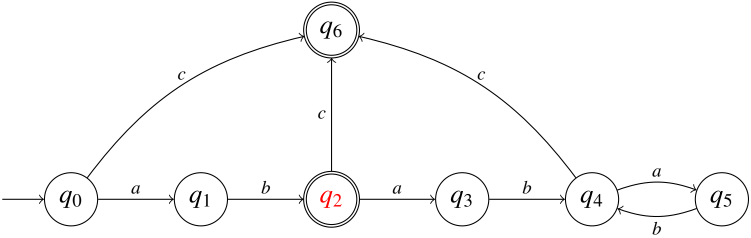
Alle undefinierten Übergänge führen zum Zustand $\emptyset$.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
s	k								
a	b	a	b	a	b	a	b	a	b

$q =$ $\quad q_1$

$p = \perp \qquad S = \{\langle q_0, 1\rangle, \langle q_1, 2\rangle\}$

$j =$

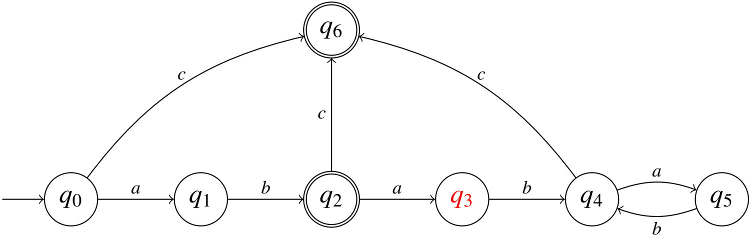


Alle undefinierten Übergänge führen zum Zustand $\emptyset$.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
	s		k							
	a	b	a	b	a	b	a	b	a	b
$q =$			q_2							

$p = q_2$ $\quad S = \emptyset$

$j = 3$

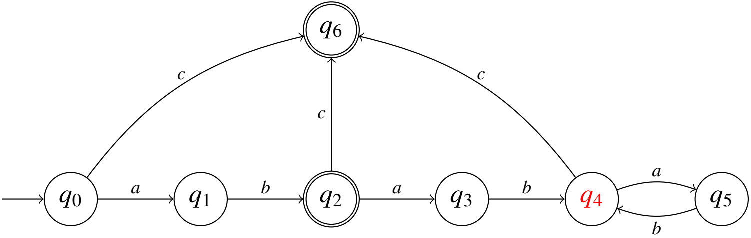


Alle undefinierten Übergänge führen zum Zustand $\emptyset$.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
	s			k						
	a	b	a	b	a	b	a	b	a	b
$q =$				q_3						

$p = q_2$ $\quad S = \{\langle q_3, 4\rangle\}$

$j = 3$

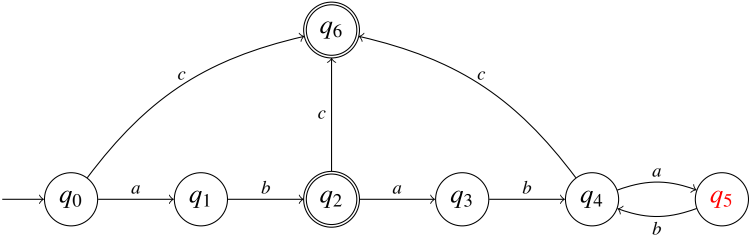


Alle undefinierten Übergänge führen zum Zustand $\emptyset$.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
	s				k					
	a	b	a	b	a	b	a	b	a	b
$q =$					q_4					

$p = q_2 \qquad S = \{\langle q_3, 4\rangle, \langle q_4, 5\rangle\}$

$j = 3$



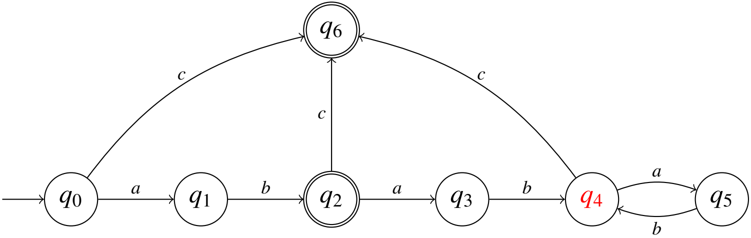
Alle undefinierten Übergänge führen zum Zustand $\emptyset$.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
s					k				
a	b	a	b	a	b	a	b	a	b
					q_5				

$q =$

$p = q_2 \qquad S = \{\langle q_3, 4\rangle, \langle q_4, 5\rangle, \langle q_5, 6\rangle\}$

$j = 3$

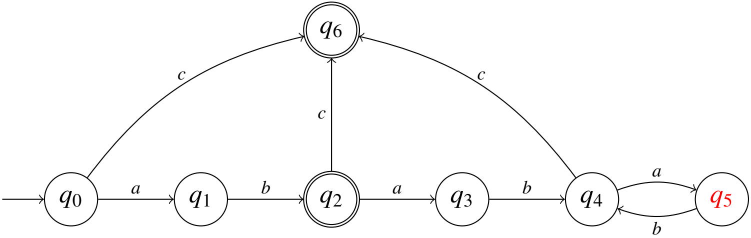


Alle undefinierten Übergänge führen zum Zustand $\emptyset$.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
	s						k			
	a	b	a	b	a	b	a	b	a	b
$q =$							q_4			

$p = q_2 \qquad S = \{\langle q_3, 4\rangle, \langle q_4, 5\rangle, \langle q_5, 6\rangle, \langle q_4, 7\rangle\}$

$j = 3$

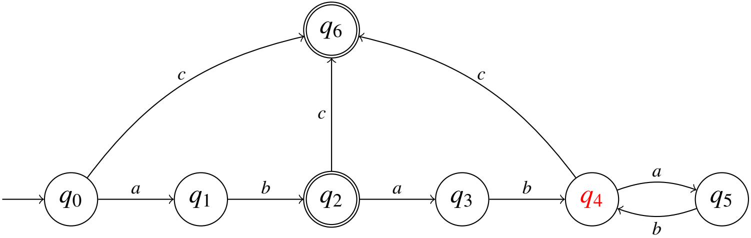


Alle undefinierten Übergänge führen zum Zustand $\emptyset$.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
	s							k		
	a	b	a	b	a	b	a	b	a	b
$q =$								q_5		

$p = q_2$ $\quad S = \{\langle q_3, 4\rangle, \langle q_4, 5\rangle, \langle q_5, 6\rangle, \langle q_4, 7\rangle, \langle q_5, 8\rangle\}$

$j = 3$

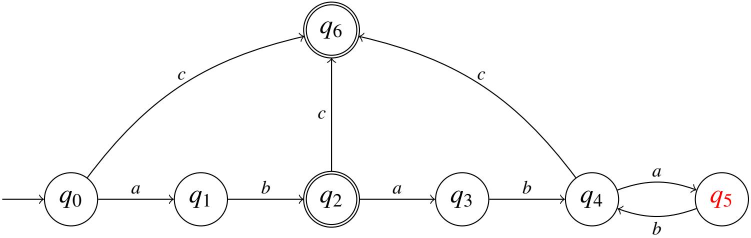


Alle undefinierten Übergänge führen zum Zustand $\emptyset$.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
	s								k	
	a	b	a	b	a	b	a	b	a	b
$q =$									q_4	

$p = q_2$ $\quad S = \{\langle q_3, 4\rangle, \langle q_4, 5\rangle, \langle q_5, 6\rangle, \langle q_4, 7\rangle, \langle q_5, 8\rangle, \langle q_4, 9\rangle\}$

$j = 3$

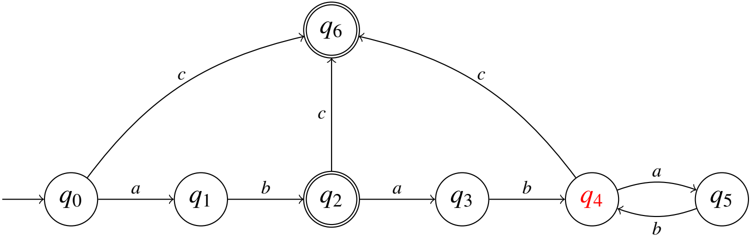


Alle undefinierten Übergänge führen zum Zustand $\emptyset$.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
	s									k
	a	b	a	b	a	b	a	b	a	b
$q =$										q_5

$p = q_2$ $\quad S = \{\langle q_3, 4\rangle, \langle q_4, 5\rangle, \langle q_5, 6\rangle, \langle q_4, 7\rangle, \langle q_5, 8\rangle, \langle q_4, 9\rangle, \langle q_5, 10\rangle\}$

$j = 3$



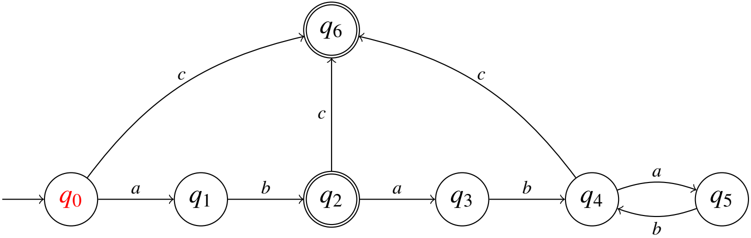
Alle undefinierten Übergänge führen zum Zustand $\emptyset$.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
s										k
a	b	a	b	a	b	a	b	a	b	

$q =$ $\qquad q_4$

$p = q_2 \qquad S = \{\langle q_3, 4\rangle, \langle q_4, 5\rangle, \langle q_5, 6\rangle, \langle q_4, 7\rangle, \langle q_5, 8\rangle, \langle q_4, 9\rangle, \langle q_5, 10\rangle, \langle q_4, 11\rangle\}$

$j = 3$



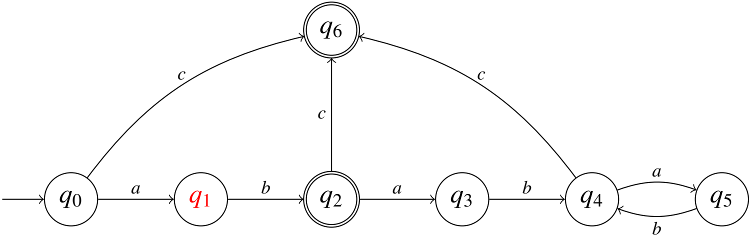
Alle undefinierten Übergänge führen zum Zustand $\emptyset$.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
		s, k							
a	b	a	b	a	b	a	b	a	b

$q =$ q_0

$p = \perp$ $\quad S = \{\langle q_0, 3\rangle\}$

$j =$ $\quad$ fehlversuch $=$ true für $[q_3, 4], [q_4, 5], [q_5, 6], [q_4, 7],$
$[q_5, 8], [q_4, 9], [q_5, 10], [q_4, 11]$

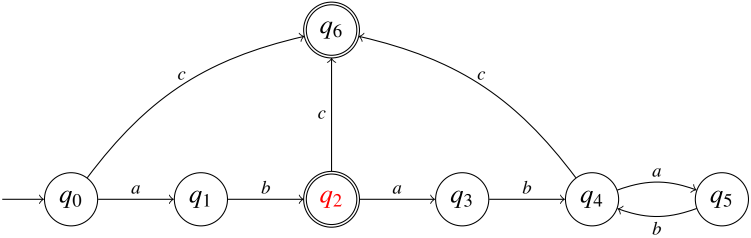


Alle undefinierten Übergänge führen zum Zustand $\emptyset$.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
			s	k						
	a	b	a	b	a	b	a	b	a	b
$q =$				q_1						

$p = \perp$ $\quad S = \{\langle q_0, 3\rangle, \langle q_1, 4\rangle\}$

$j =$ $\quad$ fehlversuch $=$ true für $[q_3, 4], [q_4, 5], [q_5, 6], [q_4, 7],$
$[q_5, 8], [q_4, 9], [q_5, 10], [q_4, 11]$



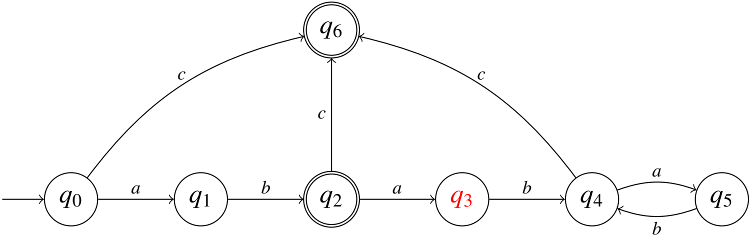
Alle undefinierten Übergänge führen zum Zustand $\emptyset$.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
		s		k					
a	b	a	b	a	b	a	b	a	b

$q =$ q_2

$p = q_2$ $S = \emptyset$

$j = 5$ fehlversuch $=$ true für $[q_3, 4], [q_4, 5], [q_5, 6], [q_4, 7],$
$[q_5, 8], [q_4, 9], [q_5, 10], [q_4, 11]$

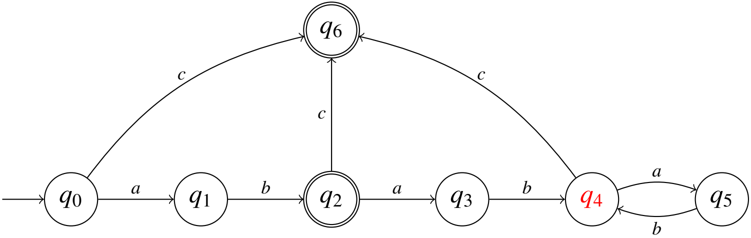


Alle undefinierten Übergänge führen zum Zustand $\emptyset$.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
			s			k				
	a	b	a	b	a	b	a	b	a	b
$q =$						q_3				

$p = q_2$ $\qquad S = \{\langle q_3, 6\rangle\}$

$j = 5$ $\qquad$ fehlversuch $=$ true für $[q_3, 4], [q_4, 5], [q_5, 6], [q_4, 7],$
$[q_5, 8], [q_4, 9], [q_5, 10], [q_4, 11]$

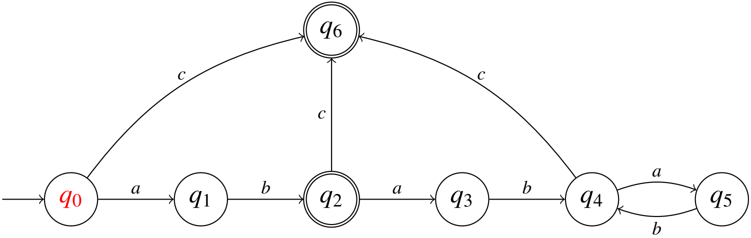


Alle undefinierten Übergänge führen zum Zustand $\emptyset$.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
			s				k			
	a	b	a	b	a	b	a	b	a	b
$q =$							q_4			

$p = q_2$ $\quad S = \{\langle q_3, 6\rangle\}$

$j = 5$ $\quad$ fehlversuch = true für $[q_3, 4], [q_4, 5], [q_5, 6], [q_4, 7],$
$[q_5, 8], [q_4, 9], [q_5, 10], [q_4, 11]$



Alle undefinierten Übergänge führen zum Zustand $\emptyset$.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
				s, k					
a	b	a	b	a	b	a	b	a	b

$q =$ $\qquad\qquad\qquad\qquad$ q_0 (unter Position 5)

$p = \perp \qquad S = \{\langle q_0, 5\rangle\}$

$j =$ $\qquad$ fehlversuch $=$ true für $[q_3, 4], [q_4, 5], [q_5, 6], [q_4, 7],$
$[q_5, 8], [q_4, 9], [q_5, 10], [q_4, 11], [q_3, 6]$

Warum benötigt Reps Maximal-Munch-Algorithmus nur lineare Zeit $O(|w|)$?

Wir sagen, dass der Algorithmus (zu einem gewissen Zeitpunkt t) eine Position j ($1 \leq j \leq |w| + 1$) besucht, wenn die Programmvariable k (zum Zeitpunkt t) auf j gesetzt wird.

Angenommen eine Position j wird $|Q| + 2$ mal besucht.

Dies passiert nur höchstens einmal, wenn gerade $k = s$ und $q = q_0$ gilt (beachte: $q_0 \notin F$).

Also wird $|Q| + 1$ mal die Position j besucht, wenn gerade $s < k = j$.

Jedem dieser $|Q| + 1$ Besuche geht ein Besuch von Position $j - 1$ voran.

Also muss Position $j - 1$ mindestens zwei mal im gleichen Zustand $p \in Q$ besucht werden (wir sprechen im folgenden vom ersten bzw. zweiten Besuch).

Der erste Besuch von Position $j-1$ im Zustand p muss erfolgreich sein, d.h. im gleichen Durchlauf durch die loop-Schleife muss in einer Position $j' \geq j-1$ ein Endzustand erreicht werden. Sonst würde nach dem ersten Besuch fehlversuch$[p, j-1]$ auf true gesetzt werden, und der Algorithmus würde nach dem zweiten Besuch nicht zur Position j weiter gehen.

Ausserdem muss $j' = j-1$ und damit $p \in F$ gelten. Sonst würde der Algorithmus nach dem ersten Besuch nicht zur Position $j-1$ zurückkehren.

Dann würde aber nach dem ersten Besuch der Algorithmus die nächste Iteration durch die loop-Schleife mit $k = s = j-1$ und $q = q_0 \neq p$ beginnen.

Danach würde der Algorithmus aber nicht mehr zur Position $j-1$ zurückkehren.

Fazit: Jede Position in dem Eingabewort wird nur höchstens $|Q|+1$ mal besucht.

Damit ergibt sich die Laufzeit $O(|Q| \cdot |w|)$.

$|Q|$ ist in realen Anwendungen wesentlich kleiner als $|w|$.

Erweiterung: Zustände

- Gelegentlich ist es nützlich, unterschiedliche Scanner-Zustände zu unterscheiden.
- In unterschiedlichen Zuständen sollen verschiedene Tokenklassen erkannt werden können.
- In Abhängigkeit der gelesenen Tokens kann der Scanner-Zustand geändert werden

Beispiel: Kommentare

Innerhalb eines Kommentars werden Identifier, Konstanten, Kommentare, ... nicht erkannt

Eingabe (verallgemeinert): eine Menge von Regeln:

$$
\begin{array}{llll}
\langle\texttt{state}\rangle & \{ & e_1 & \{\ \texttt{action}_1\ \ \texttt{yybegin}(\texttt{state}_1);\ \} \\
 & & e_2 & \{\ \texttt{action}_2\ \ \texttt{yybegin}(\texttt{state}_2);\ \} \\
 & & \ldots & \\
 & & e_k & \{\ \texttt{action}_k\ \ \texttt{yybegin}(\texttt{state}_k);\ \} \\
 & \} & &
\end{array}
$$

- Der Aufruf `yybegin (state`$_i$`);` setzt den Zustand auf `state`$_i$.
- Der Startzustand ist (z.B. bei JFlex) `YYINITIAL`.

... im Beispiel:

$$
\begin{array}{llll}
\langle\texttt{YYINITIAL}\rangle & & "/*" & \{\ \texttt{yybegin}(\texttt{COMMENT});\ \} \\
\langle\texttt{COMMENT}\rangle & \{ & "*/" & \{\ \texttt{yybegin}(\texttt{YYINITIAL});\ \} \\
 & & .\ |\ \backslash n & \{\ \ \} \\
 & \} & &
\end{array}
$$

Bemerkungen:

- “`.`” matcht alle Zeichen ungleich “`\n`”.
- Für jeden Zustand generieren wir den entsprechenden Scanner.
- Die Methode `yybegin (STATE);` schaltet zwischen den verschiedenen Scannern um.
- Kommentare könnte man auch direkt mithilfe einer geeigneten Token-Klasse implementieren. Deren Beschreibung ist aber ungleich komplizierter
- Scanner-Zustände sind insbesondere nützlich bei der Implementierung von Präprozessoren, die in einen Text eingestreute Spezifikationen expandieren sollen.

Kapitel 4:

Implementierung von DFAs

Implementierung von DFAs

Bei einem DFA mit Klassifizierung ist die Endzustandsmenge F durch eine Klassifizierungsfunktion $r : Q \to \mathbb{N}$ ersetzt.

Die Klassifizierungsfunktion $r : Q \to \mathbb{N}$ wäre bei unserem Automaten $\mathcal{P}(A_e) = (Q, \Sigma, \delta, \{q_0\}, F)$ (mit $e = (e_1 \mid \ldots \mid e_k)$) definiert durch

$$r(q) = \begin{cases} 0 & \text{falls } q \notin F \\ i & \text{falls } q \in F_i \end{cases}$$

Sie sagt uns, welche Aktion ausgeführt werden soll.

Bei einem DFA mit Klassifizierung $A = (Q, \Sigma, \delta, \{q_0\}, r)$ interessieren wir uns für die Funktion $c_A : \Sigma^* \to \mathbb{N}$ mit

$$c_A(w) = r(\delta^*(q_0, w)).$$

Implementierung von DFAs

Probleme:

- Die Anzahl der Zustände kann sehr groß sein
- Das Alphabet kann sehr groß sein: z.B. Unicode

Aufgaben:

- Implementiere die Übergangsfunktion $\delta : Q \times \Sigma \to Q$
- Implementiere eine Klassifizierung $r : Q \to \mathbb{N}$

Reduktion der Anzahl der Zustände

Idee: Minimierung (analog zur Minimierung von DFAs aus der GTI)

- Identifiziere Zustände, die sich im Hinblick auf eine Klassifizierung $r : Q \to \mathbb{N}$ gleich verhalten.
- Sei $A = (Q, \Sigma, \delta, \{q_0\}, r)$ ein DFA mit Klassifizierung. Wir definieren auf den Zuständen eine Äquivalenzrelation durch:

$$p \equiv_r q \quad \text{gdw.} \quad \forall w \in \Sigma^* \ : \ r(\delta^*(p, w)) = r(\delta^*(q, w))$$

- Die neuen Zustände sind Äquivalenzklassen der alten Zustände ($[q]_r = \{p \mid p \equiv_r q\}$).

Zustände	$[q]_r, q \in Q$
Anfangszustand	$[q_0]_r$
Klassifizierung	$r([q]_r) = r(q)$
Übergangsfunktion	$\delta([p]_r, a) = [\delta(p, a)]_r$

Beachte: wenn $p \equiv_r q$ dann gilt $r(p) = r(q)$ und $[\delta(p, a)]_r = [\delta(q, a)]_r$ für alle $a \in \Sigma$.

Reduktion der Anzahl der Zustände

Problem: Wie berechnet man $\equiv_r$?

Idee:

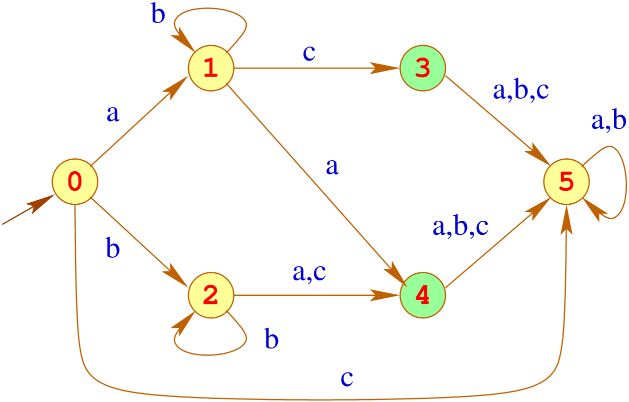
- Wir nehmen an, maximal viel sei äquivalent
  Wir starten mit der Partition:

  $$\overline{Q} = \{r^{-1}(i) \mid i \in \mathbb{N}, r^{-1}(i) \neq \emptyset\},$$

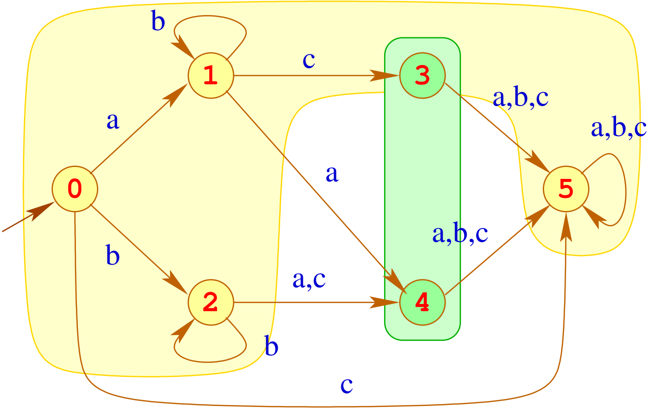
  d.h. Zustände mit der gleichen Klassifikation bilden eine Äquivalenzklasse.

- Finden wir in $\bar{q} \in \overline{Q}$ Zustände p_1, p_2 sodass $\delta(p_1, a)$ und $\delta(p_2, a)$ in verschiedenen Äquivalenzklassen liegen (für irgend ein a), müssen wir die Äquivalenzklasse $\bar{q}$ aufteilen.

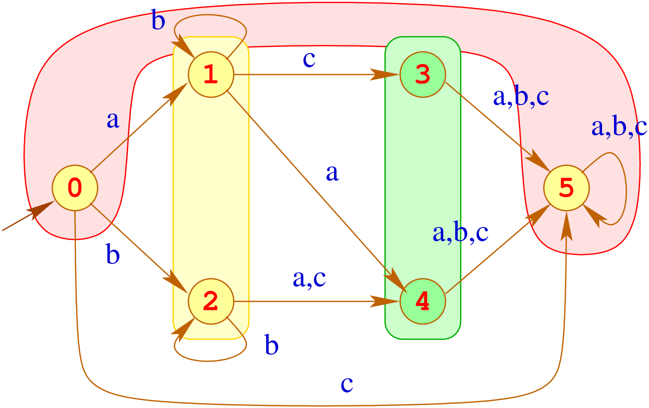
... im Beispiel:



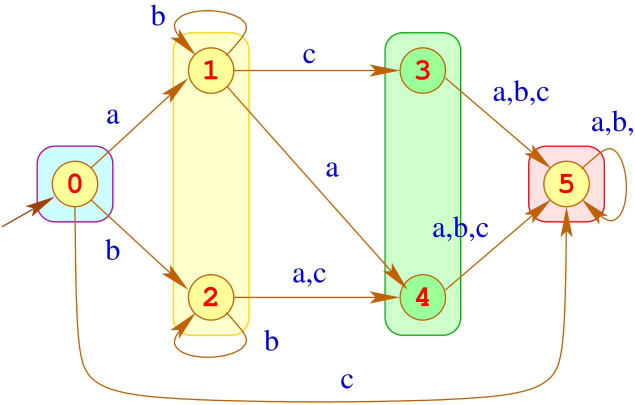
... im Beispiel:



... im Beispiel:



... im Beispiel:



Bemerkungen:

- Das Verfahren liefert die gröbste Partition $\overline{Q}$, die mit r und δ verträglich ist, d.h. für alle Zustände p_1, p_2, die in der gleichen Äquivalenzklasse liegen, gilt:
  - $r(p_1) = r(p_2)$,
  - $\delta(p_1, a), \delta(p_2, a)$ liegen in der gleichen Äquivalenzklasse (für alle $a \in \Sigma$)
- Alle Zustände die am Ende in der gleichen Partitionsklasse liegen, werden zu einem Zustand verschmolzen; das Ergebnis ist wieder ein DFA.
- Der Ergebnis-Automat ist der eindeutig bestimmte minimale Automat zur Berechnung von c_A.
- Eine naive Implementierung erfordert Laufzeit $\mathcal{O}(n^2)$.

  Eine raffinierte Verwaltung der Partition liefert ein Verfahren mit Laufzeit $\mathcal{O}(n \cdot \log(n))$.

Anil Nerode , Cornell University, Ittaca

John E. Hopcroft, Cornell University, Ittaca

Reduktion der Tabellengröße

Problem:

- Die Tabelle für δ wird mit Paaren (q, a) indiziert.
- Sie enthält eine Spalte für jedes $q \in Q$ und eine Zeile für jedes $a \in \Sigma$.
- Das Alphabet Σ umfasst i.a. ASCII, evt. aber ganz Unicode.

Reduktion der Tabellengröße

1. Idee:

- Bei großen Alphabeten wird man in der Spezifikation i.a. nicht einzelne Zeichen auflisten, sondern Zeichenklassen benutzen.
- Lege Zeilen nicht für einzelne Zeichen sondern für Klassen von Zeichen an, die sich gleich verhalten.

Beispiel:

```
le = [a-zA-Z_\$]
ledi = [a-zA-Z_\$0-9]
Id = {le} {ledi}*
```

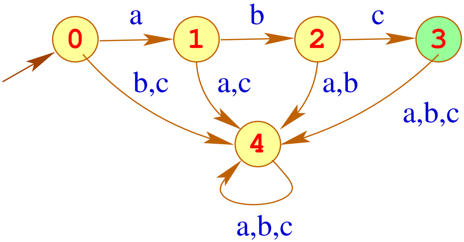
- Der Automat soll deterministisch sein.
- Sind die Klassen der Spezifikation nicht disjunkt, teilt man sie darum in Unterklassen auf, hier in die Klassen `[a-zA-Z\_\$]` und `[0-9]`.

Reduktion der Tabellengröße

2. Idee:

- Finden wir, dass mehrere (Unter-) Klassen der Spezifikation in der Zeile übereinstimmen, können wir sie nachträglich wieder vereinigen.
- Wir können weitere Methoden der Tabellen-Komprimierung anwenden, z.B. Zeilenverschiebung (Row Displacement).

Beispiel:



... die zugehörige Tabelle:

	0	1	2	3	4
a	1	4	4	4	4
b	4	2	4	4	4
c	4	4	3	4	4

Beobachtung:

- Viele Einträge in der Tabelle sind gleich einem Wert Default (hier: 4)
- Diesen Wert brauchen wir nicht zu repräsentieren

... die zugehörige Tabelle:

	0	1	2	3	4
a	1				
b		2			
c			3		

Beobachtung:

- Viele Einträge in der Tabelle sind gleich einem Wert Default (hier: 4)
- Diesen Wert brauchen wir nicht zu repräsentieren
- Dann legen wir einfach mehrere Zeilen übereinander

... im Beispiel:

	0	1	2
A	1	2	3
valid	a	b	c

- Feld valid teilt mit, für welches Element aus Σ der Eintrag gilt.
- Achtung: Im Allgemeinen werden in einer Spalte mehrere Einträge stehen.

  Dann verschieben wir die Zeilen so, dass in jeder Spalte nur noch höchstens ein Eintrag steht.
- Darum müssen wir ein zusätzliches Feld displacement verwalten, in dem wir uns die Verschiebung merken.

Beispiel:

	0	1	2	3	4
a	1		1		
b		2			
c			3		

Beispiel:

	0	1	2	3	4
a	1		1		
b		2			
c			3	3	

	0	1	2	3
A	1	2	1	3
valid	a	b	a	c

	a	b	c
displacement	0	0	1

Ein Feld-Zugriff $\delta(j, c)$ wird dann so realisiert:

$$\delta(j, c) \quad = \quad \begin{array}{l} \text{let} \quad d \quad = \quad \text{displacement}[c] \\ \text{in if } \; (\text{valid}[d + j] \equiv c) \\ \qquad\quad \text{then } \; \text{A}[d + j] \\ \qquad\quad \text{else } \; \text{Default} \end{array}$$

Ein Feld-Zugriff $\delta(j, c)$ wird dann so realisiert:

$$\begin{array}{rcl} \delta(j,c) & = & \text{let} \quad d \quad = \quad \text{displacement}[c] \\ & & \text{in if } (\text{valid}[d+j] \equiv c) \\ & & \qquad\quad \text{then } \text{A}[d+j] \\ & & \qquad\quad \text{else } \text{Default} \end{array}$$

Diskussion:

- Die Tabellen werden i.a. erheblich kleiner.
- Dafür werden Tabellenzugriffe etwas teurer.
- Zeilenverschiebung kann zur Platzeffizienten Speicherung dünn besetzter Tabellen (z.B. Matrizen wo die meisten Einträge 0 sind) verwendet werden.

Themengebiet:

Syntaktische Analyse

Die syntaktische Analyse

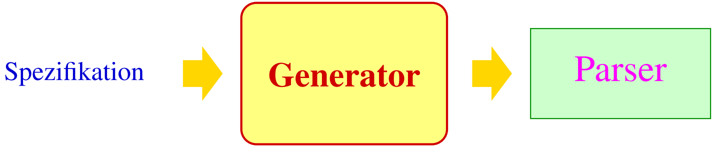
- Die syntaktische Analyse versucht, Tokens zu größeren Programmeinheiten zusammen zu fassen.

Die syntaktische Analyse

- Die syntaktische Analyse versucht, Tokens zu größeren Programmeinheiten zusammen zu fassen.
- Solche Einheiten können sein:
  - $\rightarrow$ Ausdrücke;
  - $\rightarrow$ Statements;
  - $\rightarrow$ bedingte Verzweigungen;
  - $\rightarrow$ Schleifen; ...

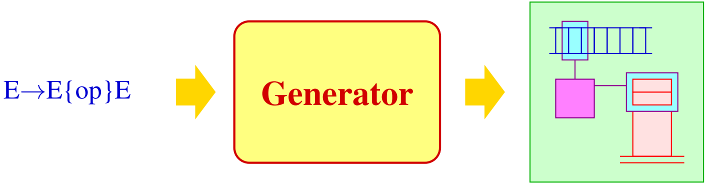
Diskussion:

Auch Parser werden i.a. nicht von Hand programmiert, sondern aus einer Spezifikation generiert:



Diskussion:

Auch Parser werden i.a. nicht von Hand programmiert, sondern aus einer Spezifikation generiert:



Spezifikation der hierarchischen Struktur: kontextfreie Grammatiken

Generierte Implementierung: Kellerautomaten + X

Kapitel 1:

Grundlagen: Kontextfreie Grammatiken

Grundlagen: Kontextfreie Grammatiken

- Programme einer Programmiersprache können unbeschränkt viele Tokens enthalten, aber nur endlich viele Token-Klassen
- Als endliches Terminal-Alphabet T wählen wir darum die Menge der Token-Klassen.
- Die Schachtelung von Programm-Konstrukten lässt sich elegant mit Hilfe von kontextfreien Grammatiken beschreiben ...

Grundlagen: Kontextfreie Grammatiken

- Programme einer Programmiersprache können unbeschränkt viele Tokens enthalten, aber nur endlich viele Token-Klassen
- Als endliches Terminal-Alphabet T wählen wir darum die Menge der Token-Klassen.
- Die Schachtelung von Programm-Konstrukten lässt sich elegant mit Hilfe von kontextfreien Grammatiken beschreiben ...

Definition:

Eine kontextfreie Grammatik (CFG) ist ein 4-Tupel $G = (N, T, P, S)$ mit:

- N die Menge der Nichtterminale,
- T die Menge der Terminale,
- P die Menge der Produktionen oder Regeln, und
- $S \in N$ das Startsymbol

Noam Chomsky, MIT (Guru)

John Backus, IBM (Erfinder von Fortran)

Konventionen

Die Regeln kontextfreier Grammatiken sind von der Form:

$$A \to \alpha \quad \text{mit} \quad A \in N\,, \;\; \alpha \in (N \cup T)^*$$

Konventionen

Die Regeln kontextfreier Grammatiken sind von der Form:

$$A \to \alpha \quad \text{mit} \quad A \in N\,, \quad \alpha \in (N \cup T)^*$$

... im Beispiel:

$$\begin{array}{lll} S & \to & a\,S\,b \\ S & \to & \epsilon \end{array}$$

Spezifizierte Sprache: $\{a^n b^n \mid n \geq 0\}$

Konventionen

Die Regeln kontextfreier Grammatiken sind von der Form:

$$A \to \alpha \quad \text{mit} \quad A \in N\,, \quad \alpha \in (N \cup T)^*$$

... im Beispiel:

$$\begin{array}{lll} S & \to & a\,S\,b \\ S & \to & \epsilon \end{array}$$

Spezifizierte Sprache: $\{a^n b^n \mid n \geq 0\}$

Konventionen:

In Beispielen ist die Spezifikation der Nichtterminale und Terminale i.a. implizit:

- Nichtterminale sind: $A, B, C, \ldots, \langle \text{exp} \rangle, \langle \text{stmt} \rangle, \ldots;$
- Terminale sind: $a, b, c, \ldots,$ int, name, ...;

... weitere Beispiele:

$$
\begin{array}{lcl}
S & \to & \langle\text{stmt}\rangle \\
\langle\text{stmt}\rangle & \to & \langle\text{if}\rangle \quad | \quad \langle\text{while}\rangle \quad | \quad \langle\text{rexp}\rangle; \\
\langle\text{if}\rangle & \to & \text{if}\ (\ \langle\text{rexp}\rangle\ )\ \langle\text{stmt}\rangle\ \text{else}\ \langle\text{stmt}\rangle \\
\langle\text{while}\rangle & \to & \text{while}\ (\ \langle\text{rexp}\rangle\ )\ \langle\text{stmt}\rangle \\
\langle\text{rexp}\rangle & \to & \text{int} \quad | \quad \langle\text{lexp}\rangle \quad | \quad \langle\text{lexp}\rangle = \langle\text{rexp}\rangle \quad | \quad \ldots \\
\langle\text{lexp}\rangle & \to & \text{name} \quad | \quad \ldots
\end{array}
$$

... weitere Beispiele:

$$\begin{array}{lcl}
S & \to & \langle\text{stmt}\rangle \\
\langle\text{stmt}\rangle & \to & \langle\text{if}\rangle \quad | \quad \langle\text{while}\rangle \quad | \quad \langle\text{rexp}\rangle; \\
\langle\text{if}\rangle & \to & \text{if } (\ \langle\text{rexp}\rangle \ ) \ \langle\text{stmt}\rangle \text{ else } \langle\text{stmt}\rangle \\
\langle\text{while}\rangle & \to & \text{while } (\ \langle\text{rexp}\rangle \ ) \ \langle\text{stmt}\rangle \\
\langle\text{rexp}\rangle & \to & \text{int} \quad | \quad \langle\text{lexp}\rangle \quad | \quad \langle\text{lexp}\rangle = \langle\text{rexp}\rangle \quad | \quad \ldots \\
\langle\text{lexp}\rangle & \to & \text{name} \quad | \quad \ldots
\end{array}$$

Weitere Konventionen:

- Für jedes Nichtterminal sammeln wir die rechten Regelseiten und listen sie gemeinsam auf
- Die j-te Regel für A können wir durch das Paar (A, j) bezeichnen ($j \geq 0$).

Weitere Grammatiken:

$$E \rightarrow E{+}E \mid E{*}E \mid (\,E\,) \mid \text{name} \mid \text{int}$$

$$\begin{array}{lcl} E & \rightarrow & E{+}T \mid T \\ T & \rightarrow & T{*}F \mid F \\ F & \rightarrow & (\,E\,) \mid \text{name} \mid \text{int} \end{array}$$

Die beiden Grammatiken beschreiben die gleiche Sprache

Weitere Grammatiken:

$$E \rightarrow E{+}E^{\,0} \;\mid\; E{*}E^{\,1} \;\mid\; (\,E\,)^{\,2} \;\mid\; \texttt{name}^{\,3} \;\mid\; \texttt{int}^{\,4}$$

$$\begin{array}{lcl} E & \rightarrow & E{+}T^{\,0} \;\mid\; T^{\,1} \\ T & \rightarrow & T{*}F^{\,0} \;\mid\; F^{\,1} \\ F & \rightarrow & (\,E\,)^{\,0} \;\mid\; \texttt{name}^{\,1} \;\mid\; \texttt{int}^{\,2} \end{array}$$

Die beiden Grammatiken beschreiben die gleiche Sprache

Wortersetzungssysteme

Grammatiken sind Wortersetzungssysteme.
Die Regeln geben die möglichen Ersetzungsschritte an.
Eine Folge solcher Ersetzungsschritte heißt auch Ableitung.

Wortersetzungssysteme

Grammatiken sind Wortersetzungssysteme.
Die Regeln geben die möglichen Ersetzungsschritte an.
Eine Folge solcher Ersetzungsschritte heißt auch Ableitung.

... im letzten Beispiel:

$$\underline{E}$$

Wortersetzungssysteme

Grammatiken sind Wortersetzungssysteme.
Die Regeln geben die möglichen Ersetzungsschritte an.
Eine Folge solcher Ersetzungsschritte heißt auch Ableitung.

... im letzten Beispiel:

$$\underline{E} \quad \to \quad \underline{E} + T$$

Wortersetzungssysteme

Grammatiken sind Wortersetzungssysteme.
Die Regeln geben die möglichen Ersetzungsschritte an.
Eine Folge solcher Ersetzungsschritte heißt auch Ableitung.

... im letzten Beispiel:

$$\begin{array}{lll} \underline{E} & \to & \underline{E} + T \\ & \to & \underline{T} + T \end{array}$$

Wortersetzungssysteme

Grammatiken sind Wortersetzungssysteme.
Die Regeln geben die möglichen Ersetzungsschritte an.
Eine Folge solcher Ersetzungsschritte heißt auch Ableitung.

... im letzten Beispiel:

$$\begin{array}{lll} \underline{E} & \to & \underline{E} + T \\ & \to & \underline{T} + T \\ & \to & T * \underline{F} + T \end{array}$$

Wortersetzungssysteme

Grammatiken sind Wortersetzungssysteme.
Die Regeln geben die möglichen Ersetzungsschritte an.
Eine Folge solcher Ersetzungsschritte heißt auch Ableitung.

... im letzten Beispiel:

$$\begin{array}{lll} \underline{E} & \to & \underline{E} + T \\ & \to & \underline{T} + T \\ & \to & T * \underline{F} + T \\ & \to & \underline{T} * \text{int} + T \end{array}$$

Wortersetzungssysteme

Grammatiken sind Wortersetzungssysteme.
Die Regeln geben die möglichen Ersetzungsschritte an.
Eine Folge solcher Ersetzungsschritte heißt auch Ableitung.

... im letzten Beispiel:

$$\begin{array}{lll} \underline{E} & \to & \underline{E} + T \\ & \to & \underline{T} + T \\ & \to & T * \underline{F} + T \\ & \to & \underline{T} * \mathsf{int} + T \\ & \to & \underline{F} * \mathsf{int} + T \end{array}$$

Wortersetzungssysteme

Grammatiken sind Wortersetzungssysteme.
Die Regeln geben die möglichen Ersetzungsschritte an.
Eine Folge solcher Ersetzungsschritte heißt auch Ableitung.

... im letzten Beispiel:

$$
\begin{array}{lll}
\underline{E} & \to & \underline{E} + T \\
 & \to & \underline{T} + T \\
 & \to & T * \underline{F} + T \\
 & \to & \underline{T} * \text{int} + T \\
 & \to & \underline{F} * \text{int} + T \\
 & \to & \text{name} * \text{int} + \underline{T}
\end{array}
$$

Wortersetzungssysteme

Grammatiken sind Wortersetzungssysteme.
Die Regeln geben die möglichen Ersetzungsschritte an.
Eine Folge solcher Ersetzungsschritte heißt auch Ableitung.

... im letzten Beispiel:

$$\begin{array}{lll} \underline{E} & \to & \underline{E} + T \\ & \to & \underline{T} + T \\ & \to & T * \underline{F} + T \\ & \to & \underline{T} * \mathsf{int} + T \\ & \to & \underline{F} * \mathsf{int} + T \\ & \to & \mathsf{name} * \mathsf{int} + \underline{T} \\ & \to & \mathsf{name} * \mathsf{int} + \underline{F} \end{array}$$

Wortersetzungssysteme

Grammatiken sind Wortersetzungssysteme.
Die Regeln geben die möglichen Ersetzungsschritte an.
Eine Folge solcher Ersetzungsschritte heißt auch Ableitung.

... im letzten Beispiel:

$$
\begin{array}{lll}
\underline{E} & \to & \underline{E} + T \\
 & \to & \underline{T} + T \\
 & \to & T * \underline{F} + T \\
 & \to & \underline{T} * \mathsf{int} + T \\
 & \to & \underline{F} * \mathsf{int} + T \\
 & \to & \mathsf{name} * \mathsf{int} + \underline{T} \\
 & \to & \mathsf{name} * \mathsf{int} + \underline{F} \\
 & \to & \mathsf{name} * \mathsf{int} + \mathsf{int}
\end{array}
$$

Formal ist $\rightarrow$ eine Relation auf Wörtern über $V = N \cup T$, wobei

$\alpha \rightarrow \alpha'$ gdw. $\exists\, \alpha_1, \alpha_2 \in V^* \;\exists A \rightarrow \beta \in P : \alpha = \alpha_1\, A\, \alpha_2 \;\wedge\; \alpha' = \alpha_1\, \beta\, \alpha_2$

Den reflexiven und transitiven Abschluss von $\rightarrow$ schreiben wir als $\rightarrow^*$

Formal ist $\rightarrow$ eine Relation auf Wörtern über $V = N \cup T$, wobei

$\alpha \rightarrow \alpha'$ gdw. $\exists\, \alpha_1, \alpha_2 \in V^* \; \exists A \rightarrow \beta \in P : \alpha = \alpha_1\, A\, \alpha_2 \;\wedge\; \alpha' = \alpha_1\, \beta\, \alpha_2$

Den reflexiven und transitiven Abschluss von $\rightarrow$ schreiben wir als $\rightarrow^*$

Bemerkungen:

- Die Relation $\rightarrow$ hängt von der Grammatik ab
- Eine Folge von Ersetzungsschritten: $\alpha_0 \rightarrow \alpha_1 \rightarrow \cdots \rightarrow \alpha_m$ heißt Ableitung.
- In jedem Schritt einer Ableitung können wir:
  - eine Stelle auswählen, wo wir ersetzen wollen, sowie
  - eine Regel, wie wir ersetzen wollen.
- Die von G spezifizierte Sprache ist:

$$\mathcal{L}(G) = \{ w \in T^* \mid S \rightarrow^* w \}$$

Ableitungsbaum

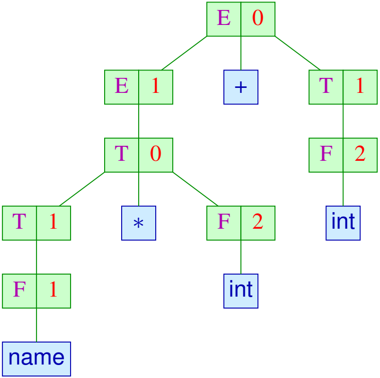
Achtung:

Die Reihenfolge, in der disjunkte Teile abgeleitet werden, ist unerheblich

Ableitungen eines Symbols stellt man als Ableitungsbaum dar:

... im Beispiel:

$$
\begin{array}{llll}
\underline{E} & \to^{0} & \underline{E} + T \\
 & \to^{1} & \underline{T} + T \\
 & \to^{0} & T * \underline{F} + T \\
 & \to^{2} & \underline{T} * \mathsf{int} + T \\
 & \to^{1} & \underline{F} * \mathsf{int} + T \\
 & \to^{1} & \mathsf{name} * \mathsf{int} + \underline{T} \\
 & \to^{1} & \mathsf{name} * \mathsf{int} + \underline{F} \\
 & \to^{2} & \mathsf{name} * \mathsf{int} + \mathsf{int}
\end{array}
$$



Ein Ableitungsbaum für $A \in N$:

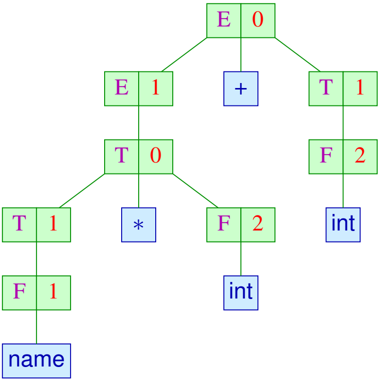
innere Knoten:	Regel-Anwendungen;
Wurzel:	Regel-Anwendung für A;
Blätter:	Terminale oder ϵ (leeres Wort);

Die Nachfolger von (B, i) entsprechen der rechten Seite der Regel

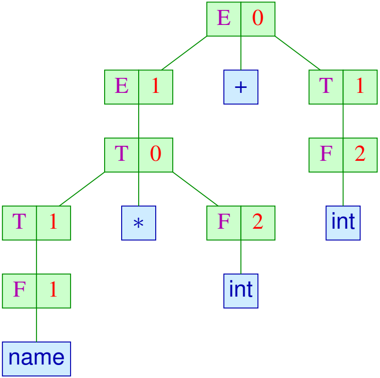
Beachte:

- Neben beliebiger Ableitungen betrachtet man solche, bei denen stets das linkste (bzw. rechteste) Vorkommen eines Nichtterminals ersetzt wird.
- Diese heißen Links- (bzw. Rechts-) Ableitungen und werden durch Index L bzw. R gekennzeichnet.
- Links-(bzw. Rechts-) Ableitungen entsprechen einem links-rechts (bzw. rechts-links) preorder-DFS-Durchlauf durch den Ableitungsbaum (DFS = depth-first-search)
- Bei der reversen Rechts-Ableitung wird die Rechts-Ableitung rückwärts gelesen. Dies entspricht einem links-rechts postorder-DFS-Durchlauf durch den Ableitungsbaum

... im Beispiel:

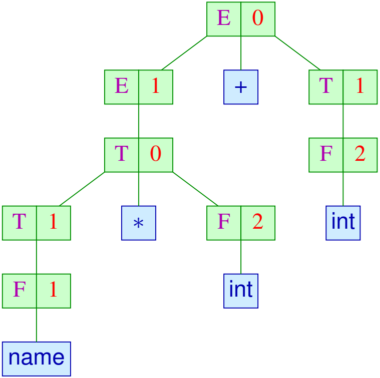


... im Beispiel:



Links-Ableitung: $(E, 0)\ (E, 1)\ (T, 0)\ (T, 1)\ (F, 1)\ (F, 2)\ (T, 1)\ (F, 2)$

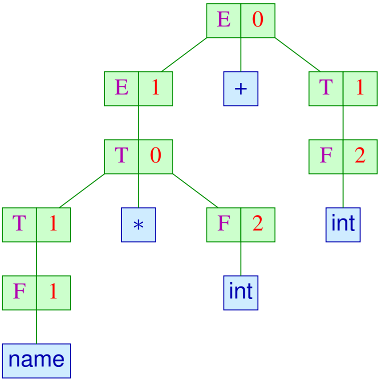
... im Beispiel:



Links-Ableitung: $(E,0)\,(E,1)\,(T,0)\,(T,1)\,(F,1)\,(F,2)\,(T,1)\,(F,2)$

Rechts-Ableitung: $(E,0)\,(T,1)\,(F,2)\,(E,1)\,(T,0)\,(F,2)\,(T,1)\,(F,1)$

... im Beispiel:

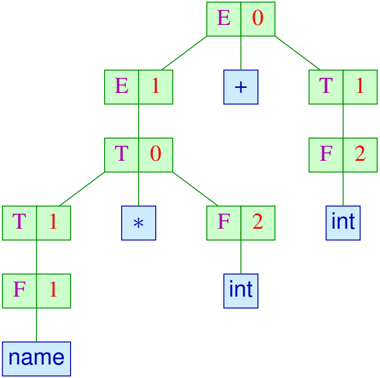


Links-Ableitung: $(E,0)\;(E,1)\;(T,0)\;(T,1)\;(F,1)\;(F,2)\;(T,1)\;(F,2)$

Rechts-Ableitung: $(E,0)\;(T,1)\;(F,2)\;(E,1)\;(T,0)\;(F,2)\;(T,1)\;(F,1)$

Reverse Rechts-Ableit.: $(F,1)\;(T,1)\;(F,2)\;(T,0)\;(E,1)\;(F,2)\;(T,1)\;(E,0)$

... im Beispiel:

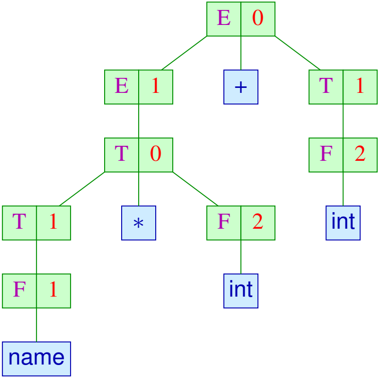


Links-Ableitung:	$(E,0)\ (E,1)\ (T,0)\ (T,1)\ (F,1)\ (F,2)\ (T,1)\ (F,2)$
Rechts-Ableitung:	$(E,0)\ (T,1)\ (F,2)\ (E,1)\ (T,0)\ (F,2)\ (T,1)\ (F,1)$
Reverse Rechts-Ableit.:	$(F,1)\ (T,1)\ (F,2)\ (T,0)\ (E,1)\ (F,2)\ (T,1)\ (E,0)$

Bei der reversen Rechts-Ableitung wird das Terminalwort (hier name $*$ int $+$ int) von links nach rechts durch Rückwärtsanwendung der Regeln auf das Startsymbol (hier E) reduziert.

Die Konkatenation der Blätter des Ableitungsbaums t bezeichnen wir auch mit yield(t) .

... im Beispiel:



liefert die Konkatenation: name $*$ int $+$ int .

Eindeutige Grammatiken

Definition:

Die Grammatik G heißt eindeutig, falls es zu jedem $w \in T^*$ höchstens einen Ableitungsbaum t von S gibt mit $\text{yield}(t) = w$.

... unsere beiden Grammatiken:

$$E \to E{+}E^{\,0} \mid E{*}E^{\,1} \mid (\,E\,)^{\,2} \mid \text{name}^{\,3} \mid \text{int}^{\,4}$$

$$\begin{array}{lcl} E & \to & E{+}T^{\,0} \mid T^{\,1} \\ T & \to & T{*}F^{\,0} \mid F^{\,1} \\ F & \to & (\,E\,)^{\,0} \mid \text{name}^{\,1} \mid \text{int}^{\,2} \end{array}$$

Die zweite ist eindeutig, die erste nicht

Fazit:

- Ein Ableitungsbaum repräsentiert eine mögliche hierarchische Struktur eines Worts.
- Bei Programmiersprachen sind wir nur an Grammatiken interessiert, bei denen die Struktur stets eindeutig ist.
- Ableitungsbäume stehen in eins-zu-eins-Korrespondenz mit Links-Ableitungen wie auch (reversen) Rechts-Ableitungen.
- Links-Ableitungen entsprechen einem Top-down-Aufbau (von der Wurzel zu den Blättern) des Ableitungsbaums.
- Reverse Rechts-Ableitungen entsprechen einem Bottom-up-Aufbau (von den Blättern zu der Wurzel) des Ableitungsbaums.

Kapitel 2:

Überflüssige Nichtterminale und Regeln

Produktive und erreichbare Nichtterminale

Definition:

$A \in N$ heißt produktiv, falls $A \rightarrow^* w$ für ein $w \in T^*$
$A \in N$ heißt erreichbar, falls $S \rightarrow^* \alpha\, A\, \beta$ für geeignete $\alpha, \beta \in (T \cup N)^*$

Beispiel:

$$\begin{array}{lcl} S & \rightarrow & a\,B\,B \;\mid\; b\,D \\ A & \rightarrow & B\,c \\ B & \rightarrow & S\,d \;\mid\; C \\ C & \rightarrow & a \\ D & \rightarrow & B\,D \end{array}$$

Produktive und erreichbare Nichtterminale

Definition:

$A \in N$ heißt produktiv, falls $A \to^* w$ für ein $w \in T^*$
$A \in N$ heißt erreichbar, falls $S \to^* \alpha A \beta$ für geeignete $\alpha, \beta \in (T \cup N)^*$

Beispiel:

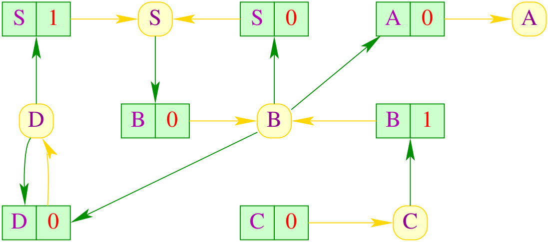
$$\begin{array}{lcl} S & \to & a\,B\,B \mid b\,D \\ A & \to & B\,c \\ B & \to & S\,d \mid C \\ C & \to & a \\ D & \to & B\,D \end{array}$$

Produktive Nichtterminale: S, A, B, C
Erreichbare Nichtterminale: S, B, C, D

And-Or-Graph

Idee für Produktivität: And-Or-Graph für die Grammatik

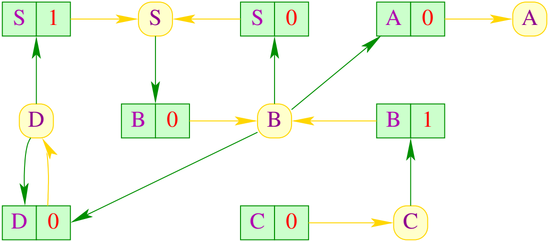
... hier:



And-Or-Graph

Idee für Produktivität: And-Or-Graph für die Grammatik

... hier:



And-Knoten: Regeln

Or-Knoten: Nichtterminale

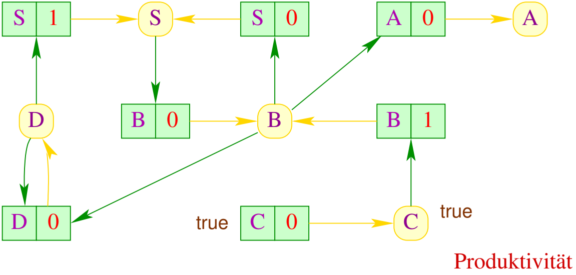
Kanten: $((B, i), B)$ für alle Regeln (B, i)

$(A, (B, i))$ falls $(B, i) \equiv B \to \alpha_1\, A\, \alpha_2$

And-Or-Graph

Idee für Produktivität: And-Or-Graph für die Grammatik

... hier:



And-Knoten: Regeln

Or-Knoten: Nichtterminale

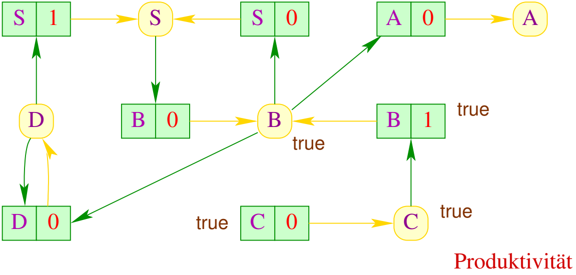
Kanten: $((B, i), B)$ für alle Regeln (B, i)

$(A, (B, i))$ falls $(B, i) \equiv B \to \alpha_1 \, A \, \alpha_2$

And-Or-Graph

Idee für Produktivität: And-Or-Graph für die Grammatik

... hier:

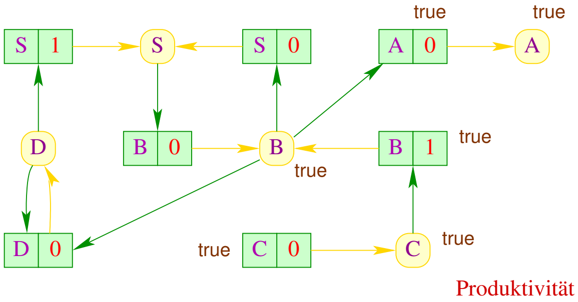


And-Knoten: Regeln
Or-Knoten: Nichtterminale
Kanten: $((B, i), B)$ für alle Regeln (B, i)
$(A, (B, i))$ falls $(B, i) \equiv B \rightarrow \alpha_1\, A\, \alpha_2$

And-Or-Graph

Idee für Produktivität: And-Or-Graph für die Grammatik

... hier:

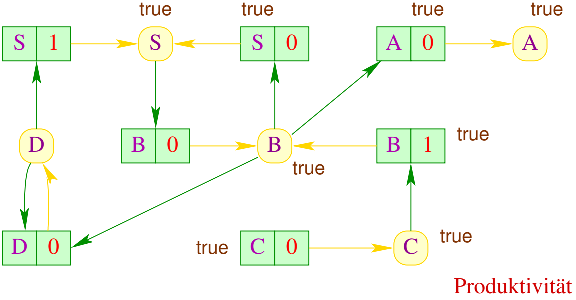


And-Knoten:	Regeln
Or-Knoten:	Nichtterminale
Kanten:	$((B, i), B)$ für alle Regeln (B, i)
	$(A, (B, i))$ falls $(B, i) \equiv B \to \alpha_1\, A\, \alpha_2$

And-Or-Graph

Idee für Produktivität: And-Or-Graph für die Grammatik

... hier:

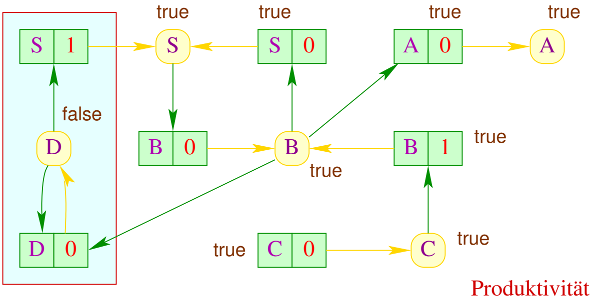


And-Knoten: Regeln
Or-Knoten: Nichtterminale
Kanten: $((B, i), B)$ für alle Regeln (B, i)
$(A, (B, i))$ falls $(B, i) \equiv B \to \alpha_1\, A\, \alpha_2$

And-Or-Graph

Idee für Produktivität: And-Or-Graph für die Grammatik

... hier:



And-Knoten: Regeln
Or-Knoten: Nichtterminale
Kanten: $((B,i),B)$ für alle Regeln (B,i)
$(A,(B,i))$ falls $(B,i) \equiv B \to \alpha_1\, A\, \alpha_2$

Algorithmus:

2^N result $= \emptyset$; // Ergebnis-Menge
int count$[P]$; // Zähler für jede Regel
2^P rhs$[N]$; // Vorkommen in rechten Seiten

forall $(A \in N)$ rhs$[A] = \emptyset$; // Initialisierung
forall $((A, i) \in P)$ { //
  count$[(A, i)] = 0$; //
  init(A, i); // Initialisierung von rhs
  } //
$\dots$ //

Die Hilfsfunktion init geht beim Aufruf init(A, i) die rechte Seite der Produktion (A, i) durch. Für jedes Nichtterminal X, dass dabei gesehen wird, wird count$[(A, i)]$ erhöht, und (A, i) in rhs$[X]$ eingefügt (wenn X mehr als einmal in der rechten Seite der Produktion (A, i) vorkommt, wird count$[(A, i)]$ nur einmal erhöht).

Algorithmus (Fortsetzung):

```
...                                                        //
2^P   W = {r ∈ P | count[r] = 0};                          //   Workset
while (W ≠ ∅)   {                                          //
        (A, i) = extract(W);                               //
        if (A ∉ result)   {                                //
                result = result ∪ {A};                     //
                forall (r ∈ rhs[A])   {                    //
                        count[r]−−;                        //
                        if (count[r] == 0)   W = W ∪ {r};  //
                        }                                  //   end of   forall
                }                                          //   end of   if
        }                                                  //   end of   while
```

Kommt eine Regel in W vor, so kann man mit ihr eine Ableitung eines Terminalworts beginnen.

Algorithmus (Erklärung):

Zu Beginn kommen alle Regeln, die auf der rechten Seite keine Nichtterminale stehen haben (count$[(A, i)] = 0$) in die Menge W.

Mit extract(W) wird eine beliebige Regel (A, i) aus W herausgegriffen.

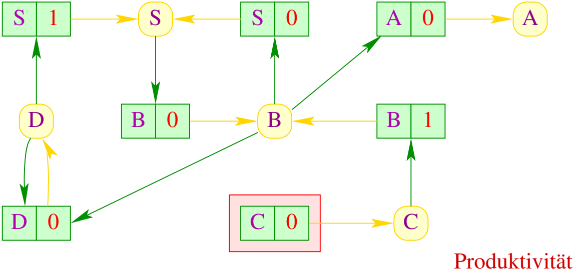
Das Nichtterminal A ist auf jeden Fall produktiv. Wenn es noch nicht zur Ergebnis-Menge result gehört, wird es in result eingefügt.

Ausserdem wird für jede Regel r, in deren rechter Seite A steht, der Zähler count$[r]$ dekrementiert (count$[r]--$).

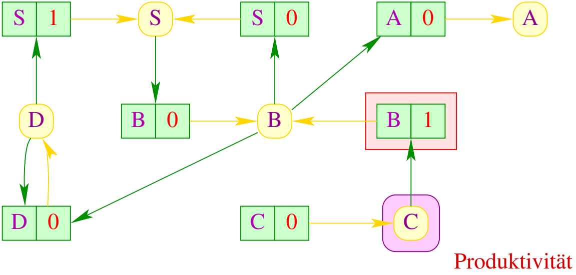
Idee: count$[r]$ speichert, wieviele Nichtterminale in der rechten Seite der Regel r noch nicht als produktiv nachgewiesen wurden.

Hat count$[r]$ schließlich den Wert Null erreicht, so sind also alle Nichtterminale in der rechten Seite von r als produktiv nachgewiesen, und wir fügen r zur Menge W hinzu.

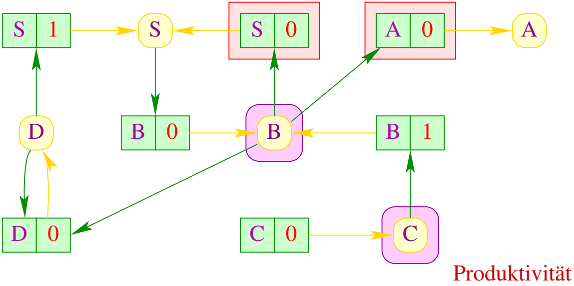
... im Beispiel:



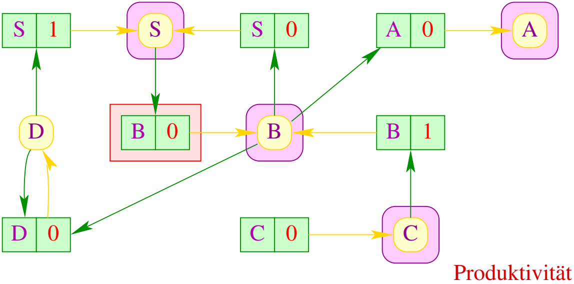
... im Beispiel:



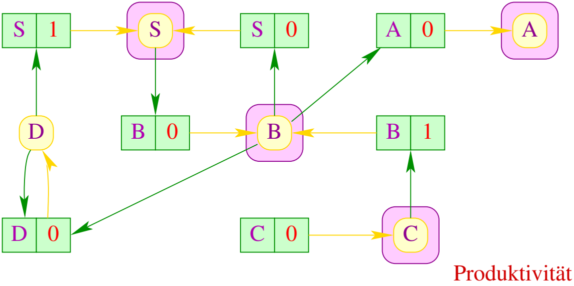
... im Beispiel:



... im Beispiel:



... im Beispiel:



Laufzeit:

- Die Größe einer Grammatik G sei die Summe der Längen aller rechten Seiten:
$$|G| = \sum_{(A \to \alpha) \in P} (|\alpha| + 1).$$
Sei n die Größe der Eingabegrammatik.
- Die Initialisierung der Datenstrukturen erfordert Zeit $O(n)$ (wir laufen einmal über alle rechten Regelseiten der Grammatik).
- Jede Regel r wird maximal einmal in W eingefügt, nämlich dann wenn count$[r]$ den Wert Null erreicht.
- Jedes A wird maximal einmal in result eingefügt, denn: result $=$ result $\cup \{A\}$ wird nur dann ausgeführt, wenn A noch nicht zu result gehört und aus der Menge result wird nie ein Nichtterminal entfernt.

$\Longrightarrow$ Laufzeit $O(n)$.

Korrektheit:

- Falls A in der j-ten Iteration der **while**-Schleife in result eingefügt, gibt es einen Ableitungsbaum für A der Höhe maximal $j - 1$
- Für jeden Ableitungsbaum wird die Wurzel einmal in W eingefügt

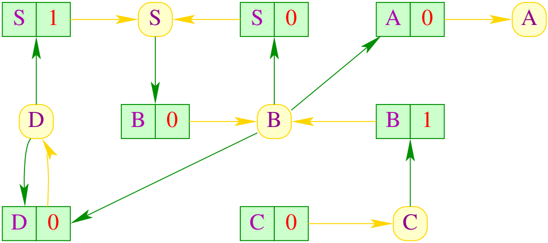
Bemerkungen zur Implementierung:

- Um den Test $(A \in \text{result})$ einfach zu machen, repräsentiert man die Menge result durch ein Array.
- W (wie auch die Mengen rhs$[A]$) wird man dagegen als Listen repräsentieren, dadurch wird extract(W) einfach.
- Der Algorithmus funktioniert auch, um kleinste Lösungen von Booleschen Ungleichungssystemen zu bestimmen.
- Die Ermittlung der produktiven Nichtterminale kann benutzt werden, um festzustellen, ob $\mathcal{L}(G) \neq \emptyset$ ist ($\rightarrow$ Leerheitsproblem).

Abhängigkeits-Graph

Idee für Erreichbarkeit: Abhängigkeits-Graph

... hier:



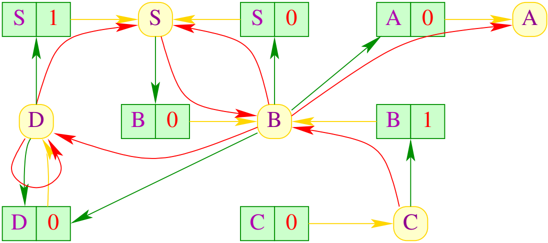
Knoten: Nichtterminale

Kanten: (A, B) falls $B \rightarrow \alpha_1\, A\, \alpha_2 \;\in\; P$

Abhängigkeits-Graph

Idee für Erreichbarkeit: Abhängigkeits-Graph

... hier:



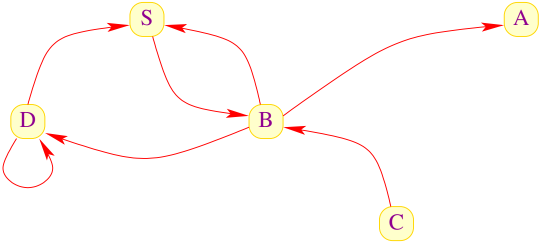
Knoten: Nichtterminale

Kanten: (A, B) falls $B \to \alpha_1 \, A \, \alpha_2 \in P$

Abhängigkeits-Graph

Idee für Erreichbarkeit: Abhängigkeits-Graph

... hier:

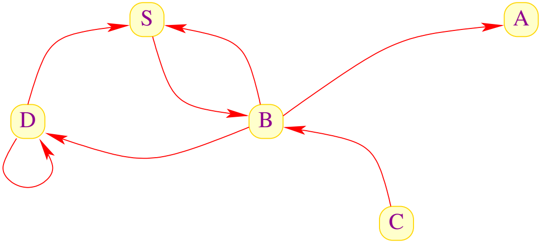


Knoten: Nichtterminale
Kanten: (A, B) falls $B \to \alpha_1\, A\, \alpha_2 \;\in\; P$

Abhängigkeits-Graph

Idee für Erreichbarkeit: Abhängigkeits-Graph

... hier:

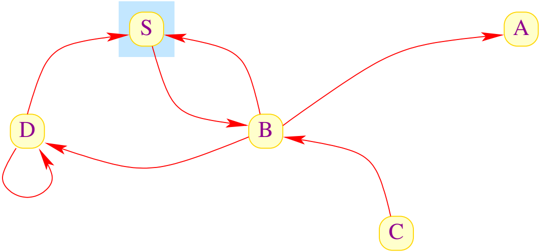


Das Nichtterminal A ist erreichbar, falls es im Abhängigkeitsgraphen einen Pfad von A nach S gibt

Abhängigkeits-Graph

Idee für Erreichbarkeit: Abhängigkeits-Graph

... hier:

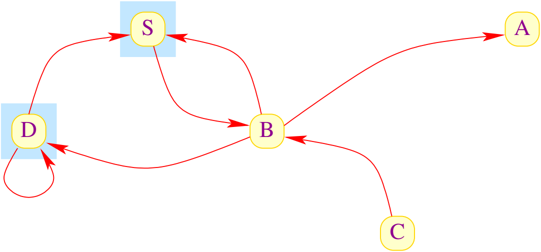


Das Nichtterminal A ist erreichbar, falls es im Abhängigkeitsgraphen einen Pfad von A nach S gibt

Abhängigkeits-Graph

Idee für Erreichbarkeit: Abhängigkeits-Graph

... hier:

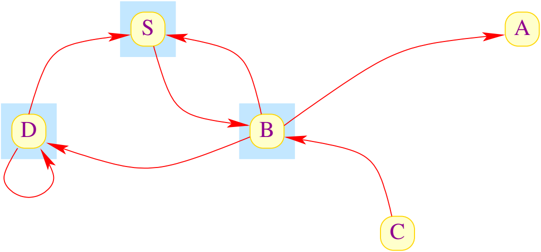


Das Nichtterminal A ist erreichbar, falls es im Abhängigkeitsgraphen einen Pfad von A nach S gibt

Abhängigkeits-Graph

Idee für Erreichbarkeit: Abhängigkeits-Graph

... hier:

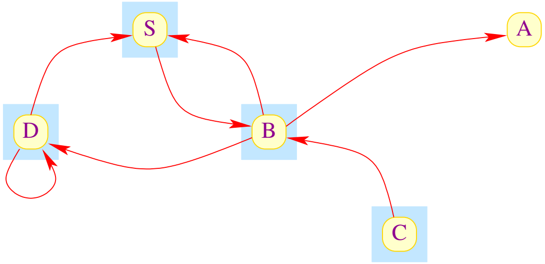


Das Nichtterminal A ist erreichbar, falls es im Abhängigkeitsgraphen einen Pfad von A nach S gibt

Abhängigkeits-Graph

Idee für Erreichbarkeit: Abhängigkeits-Graph

... hier:



Das Nichtterminal A ist erreichbar, falls es im Abhängigkeitsgraphen einen Pfad von A nach S gibt

Fazit:

- Erreichbarkeit in gerichteten Graphen kann mithilfe von DFS (depth-first-search = Tiefensuche) in linearer Zeit berechnet werden.
- Damit kann die Menge aller erreichbaren und produktiven Nichtterminale in linearer Zeit berechnet werden

Fazit:

- Erreichbarkeit in gerichteten Graphen kann mithilfe von DFS (depth-first-search = Tiefensuche) in linearer Zeit berechnet werden.
- Damit kann die Menge aller erreichbaren und produktiven Nichtterminale in linearer Zeit berechnet werden

Eine Grammatik G heißt reduziert, wenn alle Nichtterminale von G sowohl produktiv wie erreichbar sind ...

Fazit:

- Erreichbarkeit in gerichteten Graphen kann mithilfe von DFS (depth-first-search = Tiefensuche) in linearer Zeit berechnet werden.
- Damit kann die Menge aller erreichbaren und produktiven Nichtterminale in linearer Zeit berechnet werden

Eine Grammatik G heißt reduziert, wenn alle Nichtterminale von G sowohl produktiv wie erreichbar sind ...

Satz:

Zu jeder kontextfreien Grammatik $G = (N, T, P, S)$ mit $\mathcal{L}(G) \neq \emptyset$ kann in linearer Zeit eine reduzierte Grammatik G' konstruiert werden mit

$$\mathcal{L}(G) = \mathcal{L}(G')$$

Konstruktion:

1. Schritt:

Berechne die Teilmenge $N_1 \subseteq N$ aller produktiven Nichtterminale von $G = (N, T, P, S)$.
Da $\mathcal{L}(G) \neq \emptyset$ ist insbesondere $S \in N_1$.

2. Schritt:

Konstruiere: $P_1 = \{A \to \alpha \ \in \ P \mid A \in N_1 \wedge \alpha \in (N_1 \cup T)^*\}$

Konstruktion:

1. Schritt:

Berechne die Teilmenge $N_1 \subseteq N$ aller produktiven Nichtterminale von $G = (N, T, P, S)$.
Da $\mathcal{L}(G) \neq \emptyset$ ist insbesondere $S \in N_1$.

2. Schritt:

Konstruiere: $P_1 = \{A \to \alpha \in P \mid A \in N_1 \wedge \alpha \in (N_1 \cup T)^*\}$

3. Schritt:

Berechne die Teilmenge $N_2 \subseteq N_1$ aller produktiven und erreichbaren Nichtterminale von $G_1 = (N_1, T, P_1, S)$.
Da $\mathcal{L}(G_1) \neq \emptyset$ ist insbesondere $S \in N_2$.

4. Schritt:

Konstruiere: $P_2 = \{A \to \alpha \in P_1 \mid A \in N_2 \wedge \alpha \in (N_2 \cup T)^*\}$

Konstruktion:

1. Schritt:

Berechne die Teilmenge $N_1 \subseteq N$ aller produktiven Nichtterminale von $G = (N, T, P, S)$.
Da $\mathcal{L}(G) \neq \emptyset$ ist insbesondere $S \in N_1$.

2. Schritt:

Konstruiere: $P_1 = \{A \to \alpha \ \in \ P \mid A \in N_1 \wedge \alpha \in (N_1 \cup T)^*\}$

3. Schritt:

Berechne die Teilmenge $N_2 \subseteq N_1$ aller produktiven und erreichbaren Nichtterminale von $G_1 = (N_1, T, P_1, S)$.
Da $\mathcal{L}(G_1) \neq \emptyset$ ist insbesondere $S \in N_2$.

4. Schritt:

Konstruiere: $P_2 = \{A \to \alpha \ \in \ P_1 \mid A \in N_2 \wedge \alpha \in (N_2 \cup T)^*\}$

Ergebnis:

$G' = (N_2, T, P_2, S)$

... im Beispiel:

$$
\begin{array}{lcl}
S & \to & a\,B\,B \quad | \quad b\,D \\
A & \to & B\,c \\
B & \to & S\,d \quad | \quad C \\
C & \to & a \\
D & \to & B\,D
\end{array}
$$

... im Beispiel:

$$
\begin{array}{lll}
S & \rightarrow & a\,B\,B \quad | \quad b\,D \\
A & \rightarrow & B\,c \\
B & \rightarrow & S\,d \quad | \quad C \\
C & \rightarrow & a \\
D & \rightarrow & B\,D
\end{array}
$$

... im Beispiel:

$$\begin{array}{lcll} S & \to & a\,B\,B & \\ A & \to & B\,c & \\ B & \to & S\,d & \mid \quad C \\ C & \to & a & \end{array}$$

... im Beispiel:

$$\begin{array}{lll} S & \rightarrow & a\,B\,B \\ A & \rightarrow & B\,c \\ B & \rightarrow & S\,d \quad | \quad C \\ C & \rightarrow & a \end{array}$$

... im Beispiel:

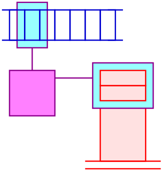
$$
\begin{array}{lll}
S & \rightarrow & a\,B\,B \\[1em]
B & \rightarrow & S\,d \quad \mid \quad C \\
C & \rightarrow & a
\end{array}
$$

Kapitel 3:

Grundlagen: Kellerautomaten

Grundlagen: Kellerautomaten

Durch kontextfreie Grammatiken spezifizierte Sprachen können durch Kellerautomaten (Pushdown Automata) akzeptiert werden:

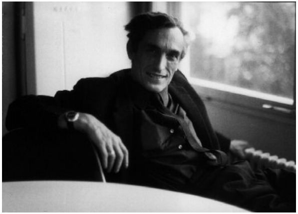


Der Keller wird z.B. benötigt, um korrekte Klammerung zu überprüfen

Friedrich L. Bauer, TUM

Klaus Samelson, TUM

Kellerautomaten für kontextfreie Sprachen wurden erstmals vorgeschlagen von Marcel-Paul Schützenberger und Antony G. Öttinger:



Marcel-Paul Schützenberger
(1920-1996), Paris

Antony G. Öttinger, Präsident
der ACM 1966-68

Beispiel:

Zustände: $0, 1, 2$
Anfangszustand: 0
Endzustände: $0, 2$

0	a	11
1	a	11
11	b	2
12	b	2

Beispiel:

Zustände: $0, 1, 2$
Anfangszustand: 0
Endzustände: $0, 2$

0	a	11
1	a	11
11	b	2
12	b	2

Achtung:

- Wir unterscheiden nicht zwischen Kellersymbolen und Zuständen.
  Auf dem Keller liegt eine Folge von Zuständen.
- Das rechteste / oberste Kellersymbol repräsentiert den aktuellen Zustand.
- Jeder Übergang liest / modifiziert einen oberen Abschnitt des Kellers.

Kellerautomaten

Definition:

Formal definieren wir deshalb einen Kellerautomaten (PDA) als ein Tupel: $M = (Q, T, \delta, q_0, F)$ mit:

- Q eine endliche Menge von Zuständen;
- T das Eingabe-Alphabet;
- $q_0 \in Q$ der Anfangszustand;
- $F \subseteq Q$ die Menge der Endzustände und
- $\delta \subseteq Q^+ \times (T \cup \{\epsilon\}) \times Q^*$ eine endliche Menge von Übergängen

Kellerautomaten

Definition:

Formal definieren wir deshalb einen Kellerautomaten (PDA) als ein Tupel: $M = (Q, T, \delta, q_0, F)$ mit:

- Q eine endliche Menge von Zuständen;
- T das Eingabe-Alphabet;
- $q_0 \in Q$ der Anfangszustand;
- $F \subseteq Q$ die Menge der Endzustände und
- $\delta \subseteq Q^+ \times (T \cup \{\epsilon\}) \times Q^*$ eine endliche Menge von Übergängen

Mithilfe der Übergänge definieren wir Berechnungen von Kellerautomaten
Der jeweilige Berechnungszustand (die aktuelle Konfiguration) ist ein Paar:

$$(\gamma, w) \in Q^* \times T^*$$

bestehend aus dem Kellerinhalt und dem noch zu lesenden Input.

... im Beispiel:

Zustände: $0, 1, 2$
Anfangszustand: 0
Endzustände: $0, 2$

0	a	11
1	a	11
11	b	2
12	b	2

... im Beispiel:

Zustände: $0, 1, 2$
Anfangszustand: 0
Endzustände: $0, 2$

0	a	11
1	a	11
11	b	2
12	b	2

$$(0\,, \quad a\,a\,a\,b\,b\,b)$$

... im Beispiel:

Zustände: $0, 1, 2$
Anfangszustand: 0
Endzustände: $0, 2$

0	a	11
1	a	11
11	b	2
12	b	2

$$(0\,, \quad a\,a\,a\,b\,b\,b) \quad \vdash \qquad (1\,1\,, \quad a\,a\,b\,b\,b)$$

... im Beispiel:

Zustände: $0, 1, 2$
Anfangszustand: 0
Endzustände: $0, 2$

0	a	11
1	a	11
11	b	2
12	b	2

$$\begin{aligned}(0, \quad a\,a\,a\,b\,b\,b) \quad &\vdash \quad (1\,1, \quad a\,a\,b\,b\,b)\\ &\vdash \quad (1\,1\,1, \quad a\,b\,b\,b)\end{aligned}$$

... im Beispiel:

Zustände: $0, 1, 2$
Anfangszustand: 0
Endzustände: $0, 2$

0	a	11
1	a	11
11	b	2
12	b	2

$$
\begin{aligned}
(0, \quad a\,a\,a\,b\,b\,b) &\vdash (1\,1, \quad a\,a\,b\,b\,b) \\
&\vdash (1\,1\,1, \quad a\,b\,b\,b) \\
&\vdash (1\,1\,1\,1, \quad b\,b\,b)
\end{aligned}
$$

... im Beispiel:

Zustände: $0, 1, 2$
Anfangszustand: 0
Endzustände: $0, 2$

0	a	11
1	a	11
11	b	2
12	b	2

$$\begin{array}{rcl} (0\,, \quad a\,a\,a\,b\,b\,b) & \vdash & (1\,1\,, \quad a\,a\,b\,b\,b) \\ & \vdash & (1\,1\,1\,, \quad a\,b\,b\,b) \\ & \vdash & (1\,1\,1\,1\,, \quad b\,b\,b) \\ & \vdash & (1\,1\,2\,, \quad b\,b) \end{array}$$

... im Beispiel:

Zustände: $0, 1, 2$
Anfangszustand: 0
Endzustände: $0, 2$

0	a	11
1	a	11
11	b	2
12	b	2

$$
\begin{aligned}
(0\,, \quad a\,a\,a\,b\,b\,b) \quad & \vdash \quad (1\,1\,, \quad a\,a\,b\,b\,b) \\
& \vdash \quad (1\,1\,1\,, \quad a\,b\,b\,b) \\
& \vdash \quad (1\,1\,1\,1\,, \quad b\,b\,b) \\
& \vdash \quad (1\,1\,2\,, \quad b\,b) \\
& \vdash \quad (1\,2\,, \quad b)
\end{aligned}
$$

... im Beispiel:

Zustände: $0, 1, 2$
Anfangszustand: 0
Endzustände: $0, 2$

0	a	11
1	a	11
11	b	2
12	b	2

$$
\begin{array}{rcr}
(0, \; a\,a\,a\,b\,b\,b) & \vdash & (1\,1, \; a\,a\,b\,b\,b) \\
& \vdash & (1\,1\,1, \; a\,b\,b\,b) \\
& \vdash & (1\,1\,1\,1, \; b\,b\,b) \\
& \vdash & (1\,1\,2, \; b\,b) \\
& \vdash & (1\,2, \; b) \\
& \vdash & (2, \; \epsilon)
\end{array}
$$

Ein Berechnungsschritt wird durch die Relation $\vdash \;\subseteq\; (Q^* \times T^*)^2$ beschrieben, wobei

$$(\alpha\,\gamma,\, x\,w) \vdash (\alpha\,\gamma',\, w) \quad \text{für alle} \quad (\gamma,\, x,\, \gamma') \in \delta,\ \alpha \in Q^*,\ w \in T^*$$

gilt.

Ein Berechnungsschritt wird durch die Relation $\vdash \;\subseteq\; (Q^* \times T^*)^2$ beschrieben, wobei

$$(\alpha\,\gamma,\, x\,w) \vdash (\alpha\,\gamma',\, w) \quad \text{für alle} \quad (\gamma,\, x,\, \gamma') \in \delta,\; \alpha \in Q^*,\; w \in T^*$$

gilt.

Bemerkungen:

- Die Relation $\vdash$ hängt natürlich vom Kellerautomaten M ab
- Die reflexive und transitive Hülle von $\vdash$ bezeichnen wir mit $\vdash^*$
- Dann ist die von M akzeptierte Sprache:

$$\mathcal{L}(M) \;=\; \{w \in T^* \mid \exists f \in F :\; (q_0, w) \vdash^* (f, \epsilon)\}$$

Ein Berechnungsschritt wird durch die Relation $\vdash \; \subseteq \; (Q^* \times T^*)^2$ beschrieben, wobei

$$(\alpha\,\gamma,\, x\,w) \vdash (\alpha\,\gamma',\, w) \quad \text{für alle} \quad (\gamma,\, x,\, \gamma') \in \delta,\ \alpha \in Q^*,\ w \in T^*$$

gilt.

Bemerkungen:

- Die Relation $\vdash$ hängt natürlich vom Kellerautomaten M ab
- Die reflexive und transitive Hülle von $\vdash$ bezeichnen wir mit $\vdash^*$
- Dann ist die von M akzeptierte Sprache:

$$\mathcal{L}(M) \;=\; \{w \in T^* \mid \exists f \in F:\; (q_0, w) \vdash^* (f, \epsilon)\}$$

Wir akzeptieren also mit Endzustand und leerem Keller

Deterministischer Kellerautomat

Definition:

Der Kellerautomat M heißt deterministisch, falls für alle verschiedenen Übergänge (γ_1, x, γ_2), $(\gamma_1', x', \gamma_2') \in \delta$ gilt:

Ist γ_1 ein Suffix von γ_1' (d.h. $\gamma_1' = \alpha\gamma_1$ für ein $\alpha \in Q^*$), dann muss $x \neq x' \ \wedge \ x \neq \epsilon \neq x'$ sein.

Dies stellt sicher, dass jede Konfiguration maximal eine Nachfolge-Konfiguration hat.

Beachte hierzu: Wenn $\gamma_1' = \alpha\gamma_1$ und $x = x'$, dann gilt $(\gamma_1', x') \vdash (\gamma_2', \varepsilon)$ sowie $(\gamma_1', x') = (\alpha\gamma_1, x) \vdash (\alpha\gamma_2, \varepsilon)$, d.h. (γ_1', x') hat (möglicherweise) zwei Nachfolge-Konfigurationen (das gleiche gilt wenn $x = \epsilon$ oder $x' = \epsilon$)

Deterministischer Kellerautomat

Beispiel: Unser Beispiel-Kellerautomat

0	a	11
1	a	11
11	b	2
12	b	2

ist deterministisch.

Shift-Reduce-Parser

Satz:

Zu jeder kontextfreien Grammatik $G = (N, T, P, S)$ kann ein Kellerautomat M konstruiert werden mit $\mathcal{L}(G) = \mathcal{L}(M)$.

Der Satz ist für uns so wichtig, dass wir zwei Konstruktionen angeben, resultierend in den Automaten $M_G^{(1)}$ und $M_G^{(2)}$:

Shift-Reduce-Parser

Satz:

Zu jeder kontextfreien Grammatik $G = (N, T, P, S)$ kann ein Kellerautomat M konstruiert werden mit $\mathcal{L}(G) = \mathcal{L}(M)$.

Der Satz ist für uns so wichtig, dass wir zwei Konstruktionen angeben, resultierend in den Automaten $M_G^{(1)}$ und $M_G^{(2)}$:

Konstruktion 1: Shift-Reduce-Parser

- Die Eingabe wird sukzessive auf den Keller geschoben.
- Liegt oben auf dem Keller eine vollständige rechte Seite (ein Handle) vor, wird dieses durch die zugehörige linke Seite ersetzt (reduziert)

Shift-Reduce-Parser

Beispiel:

$$\begin{array}{lcl} S & \to & A\,B \\ A & \to & a \\ B & \to & b \end{array}$$

Der Kellerautomat:

Zustände: q_0, f, a, b, A, B, S;
Anfangszustand: q_0
Endzustand: f

q_0	a	$q_0\,a$
a	ϵ	A
A	b	$A\,b$
b	ϵ	B
$A\,B$	ϵ	S
$q_0\,S$	ϵ	f

Shift-Reduce-Parser

Konstruktion: Allgemein konstruieren wir einen Automaten $M_G^{(1)} = (Q, T, \delta, q_0, F)$ mit:

- $Q = T \cup N \cup \{q_0, f\}$ (q_0, f sind neue Zustände);
- $F = \{f\}$;
- Übergänge:

$$
\begin{array}{lllll}
\delta & = & \{(q, x, q\,x) \mid q \in Q, x \in T\} \;\cup & // & \text{Shift-Übergänge} \\
& & \{(q\,\alpha, \epsilon, q\,A) \mid q \in Q, A \to \alpha \;\in P\} \;\cup & // & \text{Reduce-Übergänge} \\
& & \{(q_0\,S, \epsilon, f)\} & // & \text{Abschluss}
\end{array}
$$

Shift-Reduce-Parser

Konstruktion: Allgemein konstruieren wir einen Automaten $M_G^{(1)} = (Q, T, \delta, q_0, F)$ mit:

- $Q = T \cup N \cup \{q_0, f\}$ (q_0, f sind neue Zustände);
- $F = \{f\}$;
- Übergänge:

$$
\begin{array}{rcll}
\delta & = & \{(q, x, q\,x) \mid q \in Q, x \in T\} \;\cup & // \text{ Shift-Übergänge} \\
 & & \{(q\,\alpha, \epsilon, q\,A) \mid q \in Q, A \to \alpha \;\in P\} \;\cup & // \text{ Reduce-Übergänge} \\
 & & \{(q_0\,S, \epsilon, f)\} & // \text{ Abschluss}
\end{array}
$$

Beispiel-Berechnung:

$$
\begin{array}{ccccc}
(q_0, \quad a\,b) & \vdash & (q_0\;a\;, \quad b) & \vdash & (q_0\,A, \quad b) \\
 & \vdash & (q_0\,A\;b\;, \quad \epsilon) & \vdash & (q_0\;A\,B\;, \quad \epsilon) \\
 & \vdash & (q_0\,S, \quad \epsilon) & \vdash & (f, \quad \epsilon)
\end{array}
$$

Shift-Reduce-Parser

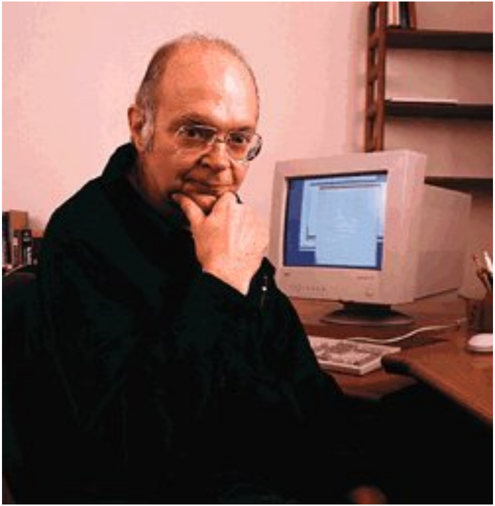
Offenbar gilt:

- Die Folge der Reduktionen entspricht einer reversen Rechtsableitung für die Eingabe
- Zur Korrektheit zeigt man, dass gilt:

$$(q, w) \vdash^* (qA, \epsilon) \qquad \text{gdw.} \qquad A \rightarrow^* w$$

- Der Shift-Reduce-Kellerautomat $M_G^{(1)}$ ist i.a. nicht-deterministisch
- Um ein deterministisches Parse-Verfahren zu erhalten, muss man die Reduktionsstellen identifizieren

$\Longrightarrow$ LR-Parsing



Donald E. Knuth, Stanford

Item-Kellerautomat

Konstruktion 2: Item-Kellerautomat

- Rekonstruiere eine Linksableitung.
- Expandiere Nichtterminale mithilfe einer Regel.
- Verifiziere sukzessive, dass die gewählte Regel mit der Eingabe übereinstimmt.
  $\Longrightarrow$ Die Zustände sind jetzt Items.
- Ein Item ist eine Regel mit Punkt:

$$[A \to \alpha \bullet \beta] \,, \quad A \to \alpha\, \beta \;\in\; P$$

Der Punkt gibt an, wieweit die Regel bereits abgearbeitet wurde

Item-Kellerautomat

Unser Beispiel:

$$S \to A\,B \qquad A \to a \qquad B \to b$$

Wir fügen eine Regel: $S' \to S$ hinzu

Dann konstruieren wir:

Anfangszustand: $[S' \to \bullet\, S]$
Endzustand: $[S' \to S\, \bullet]$

$[S' \to \bullet\, S]$	ϵ	$[S' \to \bullet\, S]\,[S \to \bullet\, A\,B]$
$[S \to \bullet\, A\,B]$	ϵ	$[S \to \bullet\, A\,B]\,[A \to \bullet\, a]$
$[A \to \bullet\, a]$	a	$[A \to a\,\bullet]$
$[S \to \bullet\, A\,B]\,[A \to a\,\bullet]$	ϵ	$[S \to A\,\bullet\, B]$
$[S \to A\,\bullet\, B]$	ϵ	$[S \to A\,\bullet\, B]\,[B \to \bullet\, b]$
$[B \to \bullet\, b]$	b	$[B \to b\,\bullet]$
$[S \to A\,\bullet\, B]\,[B \to b\,\bullet]$	ϵ	$[S \to A\,B\,\bullet]$
$[S' \to \bullet\, S]\,[S \to A\,B\,\bullet]$	ϵ	$[S' \to S\,\bullet]$

Item-Kellerautomat

Der Item-Kellerautomat $M_G^{(2)}$ hat drei Arten von Übergängen:

Expansionen: $([A \to \alpha \bullet B\,\beta], \epsilon, [A \to \alpha \bullet B\,\beta]\,[B \to \bullet\,\gamma])$ für $A \to \alpha\,B\,\beta,\; B \to \gamma \in P$

Shifts: $([A \to \alpha \bullet a\,\beta], a, [A \to \alpha\,a \bullet \beta])$ für $A \to \alpha\,a\,\beta \in P$

Reduce: $([A \to \alpha \bullet B\,\beta]\,[B \to \gamma\bullet], \epsilon, [A \to \alpha\,B \bullet \beta])$ für $A \to \alpha\,B\,\beta,\; B \to \gamma \in P$

Items der Form $[A \to \alpha\,\bullet]$ heißen auch vollständig.

Item-Kellerautomat

Intuition:

- Expansionen: Auf dem Keller liegt oben ein item der Form $[A \to \alpha \bullet B\, \beta]$, d.h. das Nichtterminal B ist als nächstes dran.

  Wir müssen als nächstes (nichtdeterministisch) eine Regel für B auswählen (etwa $B \to \gamma$), und dann das neue item $[B \to \bullet\, \gamma]$ auf den Keller legen. Danach geht es mit γ weiter.
- Shifts: Auf dem Keller liegt oben ein item der Form $[A \to \alpha \bullet a\, \beta]$.

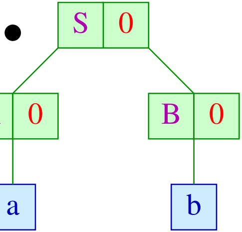
  Der Kellerautomat überprüft nun, ob das Terminalsymbol a auch in der Eingabe als nächstes dran ist.

  Wenn ja, schiebt er die Markierung an dem a vorbei ($[A \to \alpha \bullet a\, \beta]$ wird durch $[A \to \alpha\, a \bullet \beta]$ ersetzt), wenn nein, bricht der Kellerautomat ab (er kann nicht weiter rechnen).
- Reduce: Auf dem Keller liegt oben ein vollständiges item $[B \to \gamma \bullet]$, darunter muss dann ein item der Form $[A \to \alpha \bullet B\, \beta]$ liegen.

  Der Kellerautomat entfernt das item $[B \to \gamma \bullet]$ und schiebt die Markierung an dem B vorbei ($[A \to \alpha \bullet B\, \beta]$ wird durch $[A \to \alpha\, B \bullet \beta]$ ersetzt).

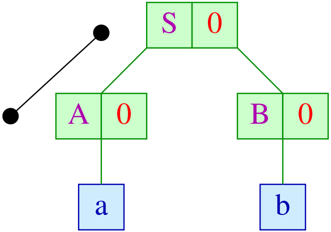
Item-Kellerautomat

Der Item-Kellerautomat schiebt den Punkt einmal um einen Ableitungsbaum herum, dabei konstruiert der Item-Kellerautomat gleichzeitig schrittweise den Ableitungsbaum.



Item-Kellerautomat

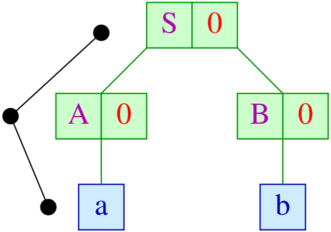
Der Item-Kellerautomat schiebt den Punkt einmal um einen Ableitungsbaum herum, dabei konstruiert der Item-Kellerautomat gleichzeitig schrittweise den Ableitungsbaum.



Markierung wird im Baum nach unten geschoben $\rightarrow$ Expansion
Markierung wird um ein Blatt herum geschoben $\rightarrow$ Shift
Markierung wird im Baum hoch geschoben $\rightarrow$ Reduce

Item-Kellerautomat

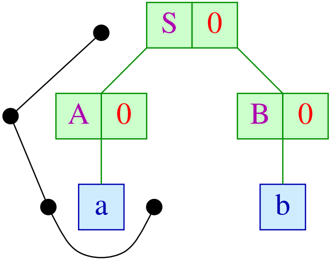
Der Item-Kellerautomat schiebt den Punkt einmal um einen Ableitungsbaum herum, dabei konstruiert der Item-Kellerautomat gleichzeitig schrittweise den Ableitungsbaum.



Markierung wird im Baum nach unten geschoben $\rightarrow$ Expansion
Markierung wird um ein Blatt herum geschoben $\rightarrow$ Shift
Markierung wird im Baum hoch geschoben $\rightarrow$ Reduce

Item-Kellerautomat

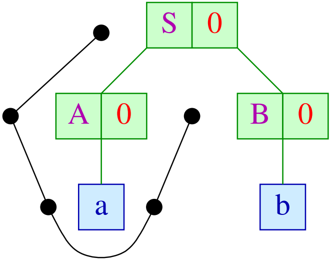
Der Item-Kellerautomat schiebt den Punkt einmal um einen Ableitungsbaum herum, dabei konstruiert der Item-Kellerautomat gleichzeitig schrittweise den Ableitungsbaum.



Markierung wird im Baum nach unten geschoben $\rightarrow$ Expansion
Markierung wird um ein Blatt herum geschoben $\rightarrow$ Shift
Markierung wird im Baum hoch geschoben $\rightarrow$ Reduce

Item-Kellerautomat

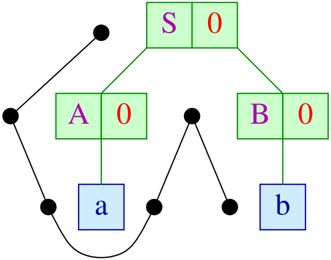
Der Item-Kellerautomat schiebt den Punkt einmal um einen Ableitungsbaum herum, dabei konstruiert der Item-Kellerautomat gleichzeitig schrittweise den Ableitungsbaum.



Markierung wird im Baum nach unten geschoben → Expansion
Markierung wird um ein Blatt herum geschoben → Shift
Markierung wird im Baum hoch geschoben → Reduce

Item-Kellerautomat

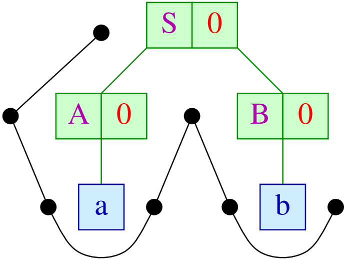
Der Item-Kellerautomat schiebt den Punkt einmal um einen Ableitungsbaum herum, dabei konstruiert der Item-Kellerautomat gleichzeitig schrittweise den Ableitungsbaum.



Markierung wird im Baum nach unten geschoben $\rightarrow$ Expansion
Markierung wird um ein Blatt herum geschoben $\rightarrow$ Shift
Markierung wird im Baum hoch geschoben $\rightarrow$ Reduce

Item-Kellerautomat

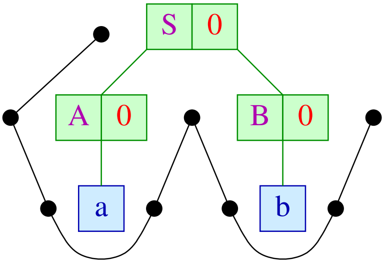
Der Item-Kellerautomat schiebt den Punkt einmal um einen Ableitungsbaum herum, dabei konstruiert der Item-Kellerautomat gleichzeitig schrittweise den Ableitungsbaum.



Markierung wird im Baum nach unten geschoben $\rightarrow$ Expansion
Markierung wird um ein Blatt herum geschoben $\rightarrow$ Shift
Markierung wird im Baum hoch geschoben $\rightarrow$ Reduce

Item-Kellerautomat

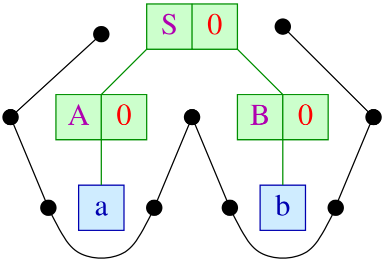
Der Item-Kellerautomat schiebt den Punkt einmal um einen Ableitungsbaum herum, dabei konstruiert der Item-Kellerautomat gleichzeitig schrittweise den Ableitungsbaum.



Markierung wird im Baum nach unten geschoben $\rightarrow$ Expansion
Markierung wird um ein Blatt herum geschoben $\rightarrow$ Shift
Markierung wird im Baum hoch geschoben $\rightarrow$ Reduce

Item-Kellerautomat

Der Item-Kellerautomat schiebt den Punkt einmal um einen Ableitungsbaum herum, dabei konstruiert der Item-Kellerautomat gleichzeitig schrittweise den Ableitungsbaum.



Markierung wird im Baum nach unten geschoben $\rightarrow$ Expansion
Markierung wird um ein Blatt herum geschoben $\rightarrow$ Shift
Markierung wird im Baum hoch geschoben $\rightarrow$ Reduce

Item-Kellerautomat

Diskussion:

- Schreibt man die bei den Expansionen ausgewählten Grammatik-Regeln der Reihe nach auf, so erhält man eine Linksableitung für das gelesene Eingabewort.
- Leider muss man bei den Expansionen nichtdeterministisch zwischen verschiedenen Regeln auswählen
- Zur Korrektheit der Konstruktion zeigt man, dass für jedes Item $[A \to \alpha \bullet B\, \beta]$ gilt:

$$([A \to \alpha \bullet B\, \beta], w) \vdash^* ([A \to \alpha\, B \bullet \beta], \epsilon) \qquad \text{gdw.} \qquad B \to^* w$$

- LL-Parsing basiert auf dem Item-Kellerautomaten und versucht, die Expansionen durch Vorausschau deterministisch zu machen

...

Philip M. Lewis, SUNY

Richard E. Stearns, SUNY

Beispiel: $S \to \epsilon \quad | \quad a\,S\,b$

Die Übergänge des zugehörigen Item-Kellerautomat:

0	$[S' \to \bullet\, S]$	ϵ	$[S' \to \bullet\, S]\,[S \to \bullet]$
1	$[S' \to \bullet\, S]$	ϵ	$[S' \to \bullet\, S]\,[S \to \bullet\, a\,S\,b]$
2	$[S \to \bullet\, a\,S\,b]$	a	$[S \to a \bullet S\,b]$
3	$[S \to a \bullet S\,b]$	ϵ	$[S \to a \bullet S\,b]\,[S \to \bullet]$
4	$[S \to a \bullet S\,b]$	ϵ	$[S \to a \bullet S\,b]\,[S \to \bullet\, a\,S\,b]$
5	$[S \to a \bullet S\,b]\,[S \to \bullet]$	ϵ	$[S \to a\,S \bullet b]$
6	$[S \to a \bullet S\,b]\,[S \to a\,S\,b\bullet]$	ϵ	$[S \to a\,S \bullet b]$
7	$[S \to a\,S \bullet b]$	b	$[S \to a\,S\,b\bullet]$
8	$[S' \to \bullet\, S]\,[S \to \bullet]$	ϵ	$[S' \to S\bullet]$
9	$[S' \to \bullet\, S]\,[S \to a\,S\,b\bullet]$	ϵ	$[S' \to S\bullet]$

Konflikte gibt es zwischen den Übergängen $(0, 1)$ bzw. zwischen $(3, 4)$ – die sich durch Betrachten des nächsten Zeichens lösen ließen

Kapitel 4:

Vorausschau-Mengen

Vorausschau-Mengen

Definition:

Für eine Sprache $L \subseteq T^*$ und $k \in \mathbb{N}$ definieren wir:

$$\mathsf{First}_k(L) \;=\; \{u \in L \mid |u| < k\} \cup \{u \in T^k \mid \exists\, v \in T^* : uv \in L\}$$

Idee: Nimm die Sprache $L \subseteq T^*$ und schneide alle Wörter nach k Symbolen ab.

Beispiel:

Für $L = \{\epsilon, ab, aabb, aaabbb\}$ gilt

$$\mathsf{First}_2(L) \;=\; \{\epsilon, ab, aa\}$$

Vorausschau-Mengen

Rechenregeln:

$\text{First}_k(\_)$ ist verträglich mit Vereinigung und Konkatenation $(\cdot)$:

$$\begin{array}{lll} \text{First}_k(\emptyset) & = & \emptyset \\ \text{First}_k(L_1 \cup L_2) & = & \text{First}_k(L_1) \cup \text{First}_k(L_2) \\ \text{First}_k(L_1 \cdot L_2) & = & \text{First}_k(\text{First}_k(L_1) \cdot \text{First}_k(L_2)) \end{array}$$

Für Sprachen $A, B \subseteq T^{\leq k}$ definieren wir $A \odot B := \text{First}_k(A \cdot B)$.

Es gilt also $\text{First}_k(L_1 \cdot L_2) = \text{First}_k(L_1) \odot \text{First}_k(L_2)$.

Beachte:

- Die Menge $\mathbb{D}_k := 2^{T^{\leq k}}$ ist endlich ($T^{\leq k} = \{w \in T^* \mid |w| \leq k\}$)
- Die Operation: $\odot : \mathbb{D}_k \times \mathbb{D}_k \to \mathbb{D}_k$ ist distributiv in jedem Argument (als Übung nachrechnen).

$$\begin{array}{lllllll} L \odot \emptyset & = & \emptyset & \qquad & L \odot (L_1 \cup L_2) & = & (L \odot L_1) \cup (L \odot L_2) \\ \emptyset \odot L & = & \emptyset & & (L_1 \cup L_2) \odot L & = & (L_1 \odot L) \cup (L_2 \odot L) \end{array}$$

First_k

Sei $G = (N, T, P, S)$ eine kontextfreie Grammatik.

Für $\alpha \in (N \cup T)^*$ sind wir interessiert an der Menge:

$$\text{First}_k(\alpha) \;=\; \text{First}_k(\{w \in T^* \mid \alpha \to^* w\})$$

Für $k \geq 1$, $x \in T \cup \{\epsilon\}$ und $\alpha_1, \alpha_2 \in (N \cup T)^*$ gilt:

$$\begin{array}{lcl} \text{First}_k(x) & = & \{x\} \\ \text{First}_k(\alpha_1\, \alpha_2) & = & \text{First}_k(\alpha_1) \odot \text{First}_k(\alpha_2) \end{array}$$

First$_k$

Sei $G = (N, T, P, S)$ eine kontextfreie Grammatik.

Für $\alpha \in (N \cup T)^*$ sind wir interessiert an der Menge:

$$\text{First}_k(\alpha) \;=\; \text{First}_k(\{w \in T^* \mid \alpha \rightarrow^* w\})$$

Für $k \geq 1$, $x \in T \cup \{\epsilon\}$ und $\alpha_1, \alpha_2 \in (N \cup T)^*$ gilt:

$$\begin{array}{lcl} \text{First}_k(x) & = & \{x\} \\ \text{First}_k(\alpha_1\,\alpha_2) & = & \text{First}_k(\alpha_1) \odot \text{First}_k(\alpha_2) \end{array}$$

Frage: Wie berechnet man $\text{First}_k(A)$ für $A \in N$?

First$_k$

Sei $G = (N, T, P, S)$ eine kontextfreie Grammatik.

Für $\alpha \in (N \cup T)^*$ sind wir interessiert an der Menge:

$$\text{First}_k(\alpha) \;=\; \text{First}_k(\{w \in T^* \mid \alpha \rightarrow^* w\})$$

Für $k \geq 1$, $x \in T \cup \{\epsilon\}$ und $\alpha_1, \alpha_2 \in (N \cup T)^*$ gilt:

$$\begin{array}{lcl} \text{First}_k(x) & = & \{x\} \\ \text{First}_k(\alpha_1\,\alpha_2) & = & \text{First}_k(\alpha_1) \odot \text{First}_k(\alpha_2) \end{array}$$

Frage: Wie berechnet man First$_k(A)$ für $A \in N$?

Idee: Stelle ein Ungleichungssystem auf!

First_2

Beispiel: $k = 2$

$$\begin{array}{lllll} E & \to & E + T & \mid & T \\ T & \to & T * F & \mid & F \\ F & \to & (\ E\ ) & \mid & \text{name} \quad \mid \quad \text{int} \end{array}$$

Jede Regel gibt Anlass zu einer Inklusionsbeziehung:

$$\begin{array}{lll} \mathsf{First}_2(E) & \supseteq & \mathsf{First}_2(E + T) \\ \mathsf{First}_2(T) & \supseteq & \mathsf{First}_2(T * F) \\ \mathsf{First}_2(F) & \supseteq & \mathsf{First}_2((\ E\ )) \end{array} \qquad \begin{array}{lll} \mathsf{First}_2(E) & \supseteq & \mathsf{First}_2(T) \\ \mathsf{First}_2(T) & \supseteq & \mathsf{First}_2(F) \\ \mathsf{First}_2(F) & \supseteq & \{\text{name}, \text{int}\} \end{array}$$

First_2

Beispiel: $k = 2$

$$\begin{array}{lllll} E & \to & E + T & \mid & T \\ T & \to & T * F & \mid & F \\ F & \to & (\ E\ ) & \mid & \text{name} \quad \mid \quad \text{int} \end{array}$$

Jede Regel gibt Anlass zu einer Inklusionsbeziehung:

$$\begin{array}{lllllll} \text{First}_2(E) & \supseteq & \text{First}_2(E + T) & \qquad & \text{First}_2(E) & \supseteq & \text{First}_2(T) \\ \text{First}_2(T) & \supseteq & \text{First}_2(T * F) & & \text{First}_2(T) & \supseteq & \text{First}_2(F) \\ \text{First}_2(F) & \supseteq & \text{First}_2((\ E\ )) & & \text{First}_2(F) & \supseteq & \{\text{name}, \text{int}\} \end{array}$$

Eine Inklusion $\text{First}_2(E) \supseteq \text{First}_2(E + T)$ kann weiter vereinfacht werden zu:

$$\text{First}_2(E) \supseteq \text{First}_2(E) \odot \{+\} \odot \text{First}_2(T)$$

Ungleichungssystem für First_2

Insgesamt erhalten wir das Ungleichungssystem:

$$
\begin{array}{rcl}
\text{First}_2(E) & \supseteq & \text{First}_2(E) \odot \{+\} \odot \text{First}_2(T) \\
\text{First}_2(T) & \supseteq & \text{First}_2(T) \odot \{*\} \odot \text{First}_2(F) \\
\text{First}_2(F) & \supseteq & \{(\} \odot \text{First}_2(E) \odot \{)\}
\end{array}
\qquad
\begin{array}{rcl}
\text{First}_2(E) & \supseteq & \text{First}_2(T) \\
\text{First}_2(T) & \supseteq & \text{First}_2(F) \\
\text{First}_2(F) & \supseteq & \{\text{name}, \text{int}\}
\end{array}
$$

Ungleichungssystem für First_k

Insgesamt erhalten wir das Ungleichungssystem:

$$\begin{array}{lll}
\text{First}_2(E) & \supseteq & \text{First}_2(E) \odot \{+\} \odot \text{First}_2(T) \\
\text{First}_2(T) & \supseteq & \text{First}_2(T) \odot \{*\} \odot \text{First}_2(F) \\
\text{First}_2(F) & \supseteq & \{(\} \odot \text{First}_2(E) \odot \{)\}
\end{array}
\qquad
\begin{array}{lll}
\text{First}_2(E) & \supseteq & \text{First}_2(T) \\
\text{First}_2(T) & \supseteq & \text{First}_2(F) \\
\text{First}_2(F) & \supseteq & \{\text{name}, \text{int}\}
\end{array}$$

Allgemein:

$$\text{First}_k(A) \quad \supseteq \quad \text{First}_k(X_1) \odot \ldots \odot \text{First}_k(X_m)$$

für jede Regel $A \to X_1 \ldots X_m \quad \in \quad P$ mit $\quad X_i \in T \cup N$.

Ungleichungssystem für First_2

Gesucht:

- möglichst kleine Lösung
- Algorithmus, der diese berechnet

... im Beispiel:

$$\begin{array}{lcl} \text{First}_2(E) & \supseteq & \text{First}_2(E) \odot \{+\} \odot \text{First}_2(T) \\ \text{First}_2(T) & \supseteq & \text{First}_2(T) \odot \{*\} \odot \text{First}_2(F) \\ \text{First}_2(F) & \supseteq & \{(\} \odot \text{First}_2(E) \odot \{)\} \end{array} \qquad \begin{array}{lcl} \text{First}_2(E) & \supseteq & \text{First}_2(T) \\ \text{First}_2(T) & \supseteq & \text{First}_2(F) \\ \text{First}_2(F) & \supseteq & \{\text{name}, \text{int}\} \end{array}$$

... hat die Lösung:

E	name, int, (name, (int, ((, name $*$, int $*$, name $+$, int $+$
T	name, int, (name, (int, ((, name $*$, int $*$
F	name, int, (name, (int, ((

Ungleichungssystem für First$_k$

Vorgehen:

1. Für jedes Nichtterminal A initialisieren wir eine Menge $\mathcal{F}(A)$ mit $\emptyset$.
2. Für jedes Terminal a initialisieren wir eine Menge $\mathcal{F}(a)$ mit $\{a\}$ (wird sich nicht verändern).
3. Falls es eine Regel First$_k(A) \supseteq$ First$_k(X_1) \odot \ldots \odot$ First$_k(X_m)$ gibt ($X_i \in T \cup N$) und $\mathcal{F}(X_1) \odot \ldots \odot \mathcal{F}(X_m)$ keine Teilmenge von $\mathcal{F}(A)$ ist, setze $\mathcal{F}(A) := \mathcal{F}(A) \cup \mathcal{F}(X_1) \odot \ldots \odot \mathcal{F}(X_m)$.
4. Führe Schritt 3 so lange aus, bis sich an den Mengen $\mathcal{F}(A)$ nichts mehr ändert, diese sind dann die Mengen First$_k(A)$.

Bemerkung: Die Reihenfolge, in der die Regeln First$_k(A) \supseteq$ First$_k(X_1) \odot \ldots \odot$ First$_k(X_m)$ in Schritt 3 betrachtet werden, spielt keine Rolle, das Endergebnis ist immer das gleiche.

Ungleichungssystem für First_2

Im Beispiel:

$$
\begin{array}{lcl@{\qquad}lcl}
\text{First}_2(E) & \supseteq & \text{First}_2(E) \odot \{+\} \odot \text{First}_2(T) & \text{First}_2(E) & \supseteq & \text{First}_2(T) \\
\text{First}_2(T) & \supseteq & \text{First}_2(T) \odot \{*\} \odot \text{First}_2(F) & \text{First}_2(T) & \supseteq & \text{First}_2(F) \\
\text{First}_2(F) & \supseteq & \{(\} \odot \text{First}_2(E) \odot \{)\} & \text{First}_2(F) & \supseteq & \{\text{name}, \text{int}\}
\end{array}
$$

A	$\mathcal{F}(A)$
E	
T	
F	

Ungleichungssystem für First_2

Im Beispiel:

$$
\begin{array}{lcl}
\text{First}_2(E) & \supseteq & \text{First}_2(E) \odot \{+\} \odot \text{First}_2(T) \\
\text{First}_2(T) & \supseteq & \text{First}_2(T) \odot \{*\} \odot \text{First}_2(F) \\
\text{First}_2(F) & \supseteq & \{(\} \odot \text{First}_2(E) \odot \{)\}
\end{array}
\qquad
\begin{array}{lcl}
\text{First}_2(E) & \supseteq & \text{First}_2(T) \\
\text{First}_2(T) & \supseteq & \text{First}_2(F) \\
\text{First}_2(F) & \supseteq & \{\text{name}, \text{int}\}
\end{array}
$$

A	$\mathcal{F}(A)$
E	
T	
F	name, int

Ungleichungssystem für First_2

Im Beispiel:

$$\begin{array}{lcllcl}
\text{First}_2(E) & \supseteq & \text{First}_2(E) \odot \{+\} \odot \text{First}_2(T) & \text{First}_2(E) & \supseteq & \text{First}_2(T) \\
\text{First}_2(T) & \supseteq & \text{First}_2(T) \odot \{*\} \odot \text{First}_2(F) & \text{First}_2(T) & \supseteq & \text{First}_2(F) \\
\text{First}_2(F) & \supseteq & \{(\} \odot \text{First}_2(E) \odot \{)\} & \text{First}_2(F) & \supseteq & \{\text{name}, \text{int}\}
\end{array}$$

A	$\mathcal{F}(A)$
E	
T	name, int
F	name, int

Ungleichungssystem für First_2

Im Beispiel:

$$\begin{array}{lcl} \text{First}_2(E) & \supseteq & \text{First}_2(E) \odot \{+\} \odot \text{First}_2(T) \\ \text{First}_2(T) & \supseteq & \text{First}_2(T) \odot \{*\} \odot \text{First}_2(F) \\ \text{First}_2(F) & \supseteq & \{(\} \odot \text{First}_2(E) \odot \{)\} \end{array} \qquad \begin{array}{lcl} \text{First}_2(E) & \supseteq & \text{First}_2(T) \\ \text{First}_2(T) & \supseteq & \text{First}_2(F) \\ \text{First}_2(F) & \supseteq & \{\text{name}, \text{int}\} \end{array}$$

A	$\mathcal{F}(A)$
E	name, int
T	name, int
F	name, int

Ungleichungssystem für First_2

Im Beispiel:

$$
\begin{array}{lcl}
\text{First}_2(E) & \supseteq & \text{First}_2(E) \odot \{+\} \odot \text{First}_2(T) \\
\text{First}_2(T) & \supseteq & \text{First}_2(T) \odot \{*\} \odot \text{First}_2(F) \\
\text{First}_2(F) & \supseteq & \{(\} \odot \text{First}_2(E) \odot \{)\}
\end{array}
\qquad
\begin{array}{lcl}
\text{First}_2(E) & \supseteq & \text{First}_2(T) \\
\text{First}_2(T) & \supseteq & \text{First}_2(F) \\
\text{First}_2(F) & \supseteq & \{\text{name}, \text{int}\}
\end{array}
$$

A	$\mathcal{F}(A)$
E	name, int
T	name, int
F	name, int, (name, (int

Ungleichungssystem für First_2

Im Beispiel:

$$\begin{array}{lcl} \mathsf{First}_2(E) & \supseteq & \mathsf{First}_2(E) \odot \{+\} \odot \mathsf{First}_2(T) \\ \mathsf{First}_2(T) & \supseteq & \mathsf{First}_2(T) \odot \{*\} \odot \mathsf{First}_2(F) \\ \mathsf{First}_2(F) & \supseteq & \{(\} \odot \mathsf{First}_2(E) \odot \{)\} \end{array} \qquad \begin{array}{lcl} \mathsf{First}_2(E) & \supseteq & \mathsf{First}_2(T) \\ \mathsf{First}_2(T) & \supseteq & \mathsf{First}_2(F) \\ \mathsf{First}_2(F) & \supseteq & \{\mathsf{name}, \mathsf{int}\} \end{array}$$

A	$\mathcal{F}(A)$
E	name, int
T	name, int, (name, (int
F	name, int, (name, (int

Ungleichungssystem für First_2

Im Beispiel:

$$\begin{array}{lll} \text{First}_2(E) & \supseteq & \text{First}_2(E) \odot \{+\} \odot \text{First}_2(T) \\ \text{First}_2(T) & \supseteq & \text{First}_2(T) \odot \{*\} \odot \text{First}_2(F) \\ \text{First}_2(F) & \supseteq & \{(\} \odot \text{First}_2(E) \odot \{)\} \end{array} \qquad \begin{array}{lll} \text{First}_2(E) & \supseteq & \text{First}_2(T) \\ \text{First}_2(T) & \supseteq & \text{First}_2(F) \\ \text{First}_2(F) & \supseteq & \{\text{name}, \text{int}\} \end{array}$$

A	$\mathcal{F}(A)$
E	name, int, (name, (int
T	name, int, (name, (int
F	name, int, (name, (int

Ungleichungssystem für First_2

Im Beispiel:

$$\begin{array}{lcl} \text{First}_2(E) & \supseteq & \text{First}_2(E) \odot \{+\} \odot \text{First}_2(T) \\ \text{First}_2(T) & \supseteq & \text{First}_2(T) \odot \{*\} \odot \text{First}_2(F) \\ \text{First}_2(F) & \supseteq & \{(\} \odot \text{First}_2(E) \odot \{)\} \end{array} \qquad \begin{array}{lcl} \text{First}_2(E) & \supseteq & \text{First}_2(T) \\ \text{First}_2(T) & \supseteq & \text{First}_2(F) \\ \text{First}_2(F) & \supseteq & \{\text{name}, \text{int}\} \end{array}$$

A	$\mathcal{F}(A)$
E	name, int, (name, (int
T	name, int, (name, (int
F	name, int, (name, (int, ((

Ungleichungssystem für First_2

Im Beispiel:

$$\begin{array}{lcl} \text{First}_2(E) & \supseteq & \text{First}_2(E) \odot \{+\} \odot \text{First}_2(T) \\ \text{First}_2(T) & \supseteq & \text{First}_2(T) \odot \{*\} \odot \text{First}_2(F) \\ \text{First}_2(F) & \supseteq & \{(\} \odot \text{First}_2(E) \odot \{)\} \end{array} \qquad \begin{array}{lcl} \text{First}_2(E) & \supseteq & \text{First}_2(T) \\ \text{First}_2(T) & \supseteq & \text{First}_2(F) \\ \text{First}_2(F) & \supseteq & \{\text{name}, \text{int}\} \end{array}$$

A	$\mathcal{F}(A)$
E	name, int, (name, (int
T	name, int, (name, (int, ((
F	name, int, (name, (int, ((

Ungleichungssystem für First_2

Im Beispiel:

$$\begin{array}{lcl} \text{First}_2(E) & \supseteq & \text{First}_2(E) \odot \{+\} \odot \text{First}_2(T) \\ \text{First}_2(T) & \supseteq & \text{First}_2(T) \odot \{*\} \odot \text{First}_2(F) \\ \text{First}_2(F) & \supseteq & \{(\} \odot \text{First}_2(E) \odot \{)\} \end{array} \qquad \begin{array}{lcl} \text{First}_2(E) & \supseteq & \text{First}_2(T) \\ \text{First}_2(T) & \supseteq & \text{First}_2(F) \\ \text{First}_2(F) & \supseteq & \{\text{name}, \text{int}\} \end{array}$$

A	$\mathcal{F}(A)$
E	name, int, (name, (int, ((
T	name, int, (name, (int, ((
F	name, int, (name, (int, ((

Ungleichungssystem für First_2

Im Beispiel:

$$\begin{array}{lcl}
\text{First}_2(E) & \supseteq & \text{First}_2(E) \odot \{+\} \odot \text{First}_2(T) \\
\text{First}_2(T) & \supseteq & \text{First}_2(T) \odot \{*\} \odot \text{First}_2(F) \\
\text{First}_2(F) & \supseteq & \{(\} \odot \text{First}_2(E) \odot \{)\}
\end{array}
\qquad
\begin{array}{lcl}
\text{First}_2(E) & \supseteq & \text{First}_2(T) \\
\text{First}_2(T) & \supseteq & \text{First}_2(F) \\
\text{First}_2(F) & \supseteq & \{\text{name}, \text{int}\}
\end{array}$$

A	$\mathcal{F}(A)$
E	name, int, (name, (int, ((
T	name, int, (name, (int, ((, name $*$, int $*$
F	name, int, (name, (int, ((

Ungleichungssystem für First_2

Im Beispiel:

$$\begin{array}{lcl} \text{First}_2(E) & \supseteq & \text{First}_2(E) \odot \{+\} \odot \text{First}_2(T) \\ \text{First}_2(T) & \supseteq & \text{First}_2(T) \odot \{*\} \odot \text{First}_2(F) \\ \text{First}_2(F) & \supseteq & \{(\} \odot \text{First}_2(E) \odot \{)\} \end{array} \qquad \begin{array}{lcl} \text{First}_2(E) & \supseteq & \text{First}_2(T) \\ \text{First}_2(T) & \supseteq & \text{First}_2(F) \\ \text{First}_2(F) & \supseteq & \{\text{name}, \text{int}\} \end{array}$$

A	$\mathcal{F}(A)$
E	name, int, (name, (int, ((, name $*$, int $*$
T	name, int, (name, (int, ((, name $*$, int $*$
F	name, int, (name, (int, ((

Ungleichungssystem für First_2

Im Beispiel:

$$\begin{array}{lcl} \text{First}_2(E) & \supseteq & \text{First}_2(E) \odot \{+\} \odot \text{First}_2(T) \\ \text{First}_2(T) & \supseteq & \text{First}_2(T) \odot \{*\} \odot \text{First}_2(F) \\ \text{First}_2(F) & \supseteq & \{(\} \odot \text{First}_2(E) \odot \{)\} \end{array} \qquad \begin{array}{lcl} \text{First}_2(E) & \supseteq & \text{First}_2(T) \\ \text{First}_2(T) & \supseteq & \text{First}_2(F) \\ \text{First}_2(F) & \supseteq & \{\text{name}, \text{int}\} \end{array}$$

A	$\mathcal{F}(A)$
E	name, int, (name, (int, ((, name $*$, int $*$, name $+$, int $+$
T	name, int, (name, (int, ((, name $*$, int $*$
F	name, int, (name, (int, ((

Ungleichungssystem für First_2

Im Beispiel:

$$\begin{array}{lcl} \text{First}_2(E) & \supseteq & \text{First}_2(E) \odot \{+\} \odot \text{First}_2(T) \\ \text{First}_2(T) & \supseteq & \text{First}_2(T) \odot \{*\} \odot \text{First}_2(F) \\ \text{First}_2(F) & \supseteq & \{(\} \odot \text{First}_2(E) \odot \{)\} \end{array} \qquad \begin{array}{lcl} \text{First}_2(E) & \supseteq & \text{First}_2(T) \\ \text{First}_2(T) & \supseteq & \text{First}_2(F) \\ \text{First}_2(F) & \supseteq & \{\text{name}, \text{int}\} \end{array}$$

A	$\text{First}_2(A)$
E	name, int, (name, (int, ((, name $*$, int $*$, name $+$, int $+$
T	name, int, (name, (int, ((, name $*$, int $*$
F	name, int, (name, (int, ((

Ungleichungssystem für First$_k$

Beobachtung:

- Die Menge $\mathbb{D}_k$ der möglichen Werte für First$_k(A)$ bilden einen vollständigen Verband
- Die Operatoren auf den rechten Seiten der Ungleichungen sind monoton, d.h. verträglich mit $\subseteq$

Kapitel 5:

Exkurs: Vollständige Verbände

Verbände

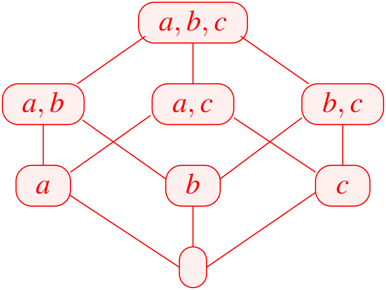
Definition:

Eine Menge $\mathbb{D}$ mit einer Relation $\sqsubseteq\ \subseteq\ \mathbb{D} \times \mathbb{D}$ ist ein Verband (Lattice) falls für alle $a, b, c \in \mathbb{D}$ gilt:

$$\begin{array}{lll} a \sqsubseteq a & & \textit{Reflexivität} \\ a \sqsubseteq b \wedge b \sqsubseteq a & \Longrightarrow\ a = b & \textit{Anti-Symmetrie} \\ a \sqsubseteq b \wedge b \sqsubseteq c & \Longrightarrow\ a \sqsubseteq c & \textit{Transitivität} \end{array}$$

Beispiele:

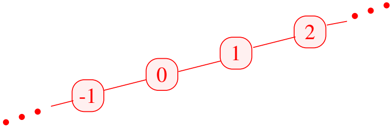
1. $\mathbb{D} = 2^{\{a,b,c\}}$ mit der Relation "$\subseteq$" :



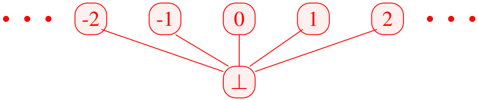
Verbände (Beispiele)

3. $\mathbb{Z}$ mit der Relation "$=$" :

3. $\mathbb{Z}$ mit der Relation "$\leq$" :



4. $\mathbb{Z}_\perp = \mathbb{Z} \cup \{\perp\}$ mit der Ordnung:



Obere Schranken

Definition:

$d \in \mathbb{D}$ heißt obere Schranke für $X \subseteq \mathbb{D}$ falls

$$x \sqsubseteq d \qquad \text{für alle} \qquad x \in X$$

Obere Schranken

Definition:

$d \in \mathbb{D}$ heißt obere Schranke für $X \subseteq \mathbb{D}$ falls

$$x \sqsubseteq d \qquad \text{für alle} \qquad x \in X$$

Definition:

d heißt kleinste obere Schranke (lub) falls

1. d eine obere Schranke ist und
2. $d \sqsubseteq y$ für jede obere Schranke y für X.

Obere Schranken

Definition:

$d \in \mathbb{D}$ heißt obere Schranke für $X \subseteq \mathbb{D}$ falls

$$x \sqsubseteq d \qquad \text{für alle} \qquad x \in X$$

Definition:

d heißt kleinste obere Schranke (lub) falls

1. d eine obere Schranke ist und
2. $d \sqsubseteq y$ für jede obere Schranke y für X.

Achtung:

- $\{0, 2, 4, \ldots\} \subseteq \mathbb{Z}$ besitzt keine obere Schranke!
- $\{0, 2, 4\} \subseteq \mathbb{Z}$ besitzt die oberen Schranken $4, 5, 6, \ldots$

Vollständige Verbände

Definition:

Ein vollständiger Verband (cl) $\mathbb{D}$ ist eine Halbordnung, in der jede Teilmenge $X \subseteq \mathbb{D}$ eine kleinste obere Schranke $\bigsqcup X \in \mathbb{D}$ besitzt.

Beachte:

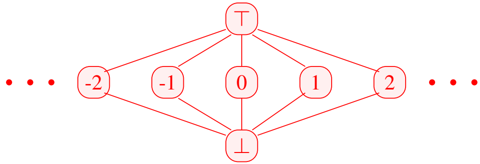
Jeder vollständige Verband besitzt

→ ein kleinstes Element $\bot = \bigsqcup \emptyset \quad \in \mathbb{D}$;

→ ein größtes Element $\top = \bigsqcup \mathbb{D} \quad \in \mathbb{D}$.

Vollständige Verbände (Beispiele:)

1. $\mathbb{D} = 2^{\{a,b,c\}}$ ist ein cl
2. $\mathbb{D} = \mathbb{Z}$ mit "$=$" ist keiner.
3. $\mathbb{D} = \mathbb{Z}$ mit "$\leq$" ebenfalls nicht.
4. $\mathbb{D} = \mathbb{Z}_\perp$ auch nicht
5. Mit einem zusätzlichen Symbol $\top$ erhalten wir den flachen Verband $\mathbb{Z}_\perp^\top = \mathbb{Z} \cup \{\perp, \top\}$:



Untere Schranken

Es gilt:

Satz:

In jedem vollständigen Verband $\mathbb{D}$ besitzt jede Teilmenge $X \subseteq \mathbb{D}$ eine größte untere Schranke $\bigsqcap X$.

Untere Schranken

Es gilt:

Satz:

In jedem vollständigen Verband $\mathbb{D}$ besitzt jede Teilmenge $X \subseteq \mathbb{D}$ eine größte untere Schranke $\bigsqcap X$.

Beweis

Konstruiere: $U = \{u \in \mathbb{D} \mid \forall\, x \in X : \; u \sqsubseteq x\}$.

// die Menge der unteren Schranken von X

Untere Schranken

Es gilt:

Satz:

In jedem vollständigen Verband $\mathbb{D}$ besitzt jede Teilmenge $X \subseteq \mathbb{D}$ eine größte untere Schranke $\bigsqcap X$.

Beweis

Konstruiere: $U = \{u \in \mathbb{D} \mid \forall x \in X : \; u \sqsubseteq x\}$.

// die Menge der unteren Schranken von X

Setze: $g := \bigsqcup U$

Behauptung: $g = \bigsqcap X$

Untere Schranken

Beweis

Konstruiere: $U = \{u \in \mathbb{D} \mid \forall x \in X : \; u \sqsubseteq x\}$.
// die Menge der unteren Schranken von X
Setze: $g := \bigsqcup U$
Behauptung: $g = \bigsqcap X$

1. g ist eine untere Schranke von X:
   Für $x \in X$ gilt:
   $u \sqsubseteq x$ für alle $u \in U$
   $\Longrightarrow$ x ist obere Schranke von U
   $\Longrightarrow$ $g \sqsubseteq x$

Untere Schranken

Beweis

Konstruiere: $U = \{u \in \mathbb{D} \mid \forall x \in X :\ u \sqsubseteq x\}$.

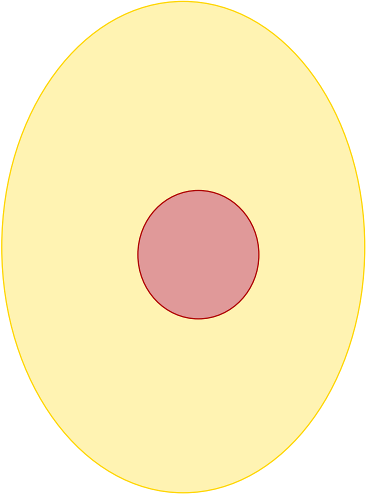
// die Menge der unteren Schranken von X

Setze: $g := \bigsqcup U$

Behauptung: $g = \bigsqcap X$

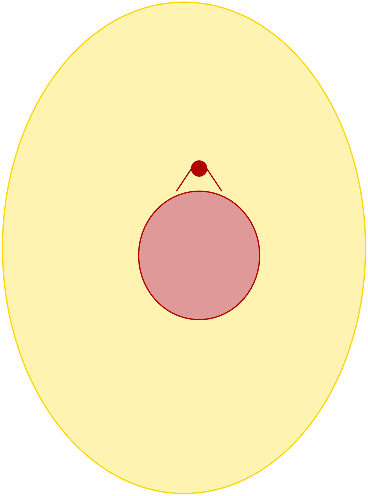
1. g ist eine untere Schranke von X:
   Für $x \in X$ gilt:
   $u \sqsubseteq x$ für alle $u \in U$
   $\Longrightarrow$ x ist obere Schranke von U
   $\Longrightarrow$ $g \sqsubseteq x$
2. g ist größte untere Schranke von X:
   Für jede untere Schranke u von X gilt:
   $u \in U$
   $\Longrightarrow$ $u \sqsubseteq g$

Verbände – grafisch



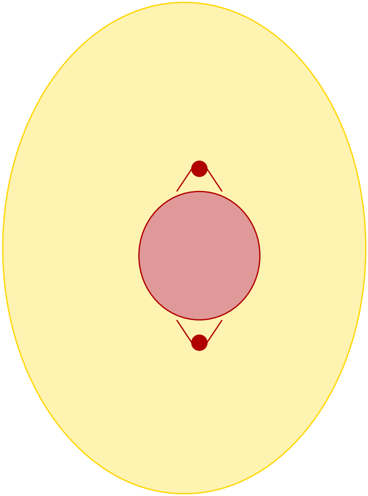
Verbände – grafisch

- Kleinste obere Schranke



Verbände – grafisch

- Kleinste obere Schranke
- Größte untere Schranke



Ungleichungssysteme über Verbänden

Problem:

Wir suchen Lösungen für Ungleichungssysteme der Form:

$$x_i \quad \sqsupseteq \quad f_i(x_1, \ldots, x_n)$$

Ungleichungssysteme über Verbänden

Problem:

Wir suchen Lösungen für Ungleichungssysteme der Form:

$$x_i \quad \sqsupseteq \quad f_i(x_1, \dots, x_n)$$

wobei:

x_i	Unbekannte
$\mathbb{D}$	Werte
$\sqsubseteq \quad \subseteq \quad \mathbb{D} \times \mathbb{D}$	Ordnungsrelation
$f_i \colon \mathbb{D}^n \to \mathbb{D}$	Bedingung

Ungleichungssysteme über Verbänden

Problem:

Wir suchen Lösungen für Ungleichungssysteme der Form:

$$x_i \quad \sqsupseteq \quad f_i(x_1, \ldots, x_n)$$

wobei:

x_i	Unbekannte	hier:	$\mathsf{First}_k(A)$
$\mathbb{D}$	Werte	hier:	$\mathbb{D}_k = 2^{T^{\leq k}}$
$\sqsubseteq \quad \subseteq \quad \mathbb{D} \times \mathbb{D}$	Ordnungsrelation	hier:	$\subseteq$
$f_i \colon \mathbb{D}^n \to \mathbb{D}$	Bedingung	hier:	...

im Beispiel: Ungleichung für $\mathsf{First}_k(A)$

$$\mathsf{First}_k(A) \quad \supseteq \quad \bigcup \{\mathsf{First}_k(X_1) \odot \ldots \odot \mathsf{First}_k(X_m) \mid A \to X_1 \ldots X_m \ \in \ P\}$$

Ungleichungssysteme über Verbänden

Problem:

Wir suchen Lösungen für Ungleichungssysteme der Form:

$$x_i \quad \sqsupseteq \quad f_i(x_1, \ldots, x_n)$$

wobei:

x_i	Unbekannte	hier:	$\text{First}_k(A)$
$\mathbb{D}$	Werte	hier:	$\mathbb{D}_k = 2^{T^{\leq k}}$
$\sqsubseteq \;\subseteq\; \mathbb{D} \times \mathbb{D}$	Ordnungsrelation	hier:	$\subseteq$
$f_i\colon \mathbb{D}^n \to \mathbb{D}$	Bedingung	hier:	...

im Beispiel: Ungleichung für $\text{First}_k(A)$

$$\text{First}_k(A) \quad \supseteq \quad \bigcup \{\text{First}_k(X_1) \odot \ldots \odot \text{First}_k(X_m) \mid A \to X_1 \ldots X_m \;\in\; P\}$$

denn: $\quad x \sqsupseteq d_1 \wedge \ldots \wedge x \sqsupseteq d_k$ gdw. $x \sqsupseteq \bigsqcup\{d_1, \ldots, d_k\}$

Monotonie

Definition:

Eine Abbildung $f : \mathbb{D}_1 \to \mathbb{D}_2$ heißt monoton, falls $f(a) \sqsubseteq f(b)$ für alle $a \sqsubseteq b$.

Monotonie

Definition:

Eine Abbildung $f : \mathbb{D}_1 \to \mathbb{D}_2$ heißt monoton, falls $f(a) \sqsubseteq f(b)$ für alle $a \sqsubseteq b$.

Beispiele:

1. $\mathbb{D}_1 = \mathbb{D}_2 = 2^U$ für eine Menge U und $f\,x = (x \cap a) \cup b$.
   Offensichtlich ist jedes solche f monoton

Monotonie

Definition:

Eine Abbildung $f : \mathbb{D}_1 \to \mathbb{D}_2$ heißt monoton, falls $f(a) \sqsubseteq f(b)$ für alle $a \sqsubseteq b$.

Beispiele:

1. $\mathbb{D}_1 = \mathbb{D}_2 = 2^U$ für eine Menge U und $f\,x = (x \cap a) \cup b$.
   Offensichtlich ist jedes solche f monoton

2. $\mathbb{D}_1 = \mathbb{D}_2 = \mathbb{Z}$ (mit der Ordnung "$\leq$"). Dann gilt:
   - $\mathsf{inc}\,x = x + 1$ ist monoton.
   - $\mathsf{dec}\,x = x - 1$ ist monoton.

Monotonie

Definition:

Eine Abbildung $f : \mathbb{D}_1 \to \mathbb{D}_2$ heißt monoton, falls $f(a) \sqsubseteq f(b)$ für alle $a \sqsubseteq b$.

Beispiele:

1. $\mathbb{D}_1 = \mathbb{D}_2 = 2^U$ für eine Menge U und $f\,x = (x \cap a) \cup b$.
   Offensichtlich ist jedes solche f monoton

2. $\mathbb{D}_1 = \mathbb{D}_2 = \mathbb{Z}$ (mit der Ordnung "$\leq$"). Dann gilt:
   - $\mathsf{inc}\,x = x + 1$ ist monoton.
   - $\mathsf{dec}\,x = x - 1$ ist monoton.
   - $\mathsf{inv}\,x = -x$ ist nicht monoton

Fixpunktiteration

Gesucht: möglichst kleine Lösung für:

$$x_i \sqsupseteq f_i(x_1, \dots, x_n), \quad i = 1, \dots, n$$

wobei alle $f_i : \mathbb{D}^n \to \mathbb{D}$ monoton sind.

Fixpunktiteration

Gesucht: möglichst kleine Lösung für:

$$x_i \sqsupseteq f_i(x_1, \ldots, x_n), \quad i = 1, \ldots, n$$

wobei alle $f_i : \mathbb{D}^n \to \mathbb{D}$ monoton sind.

Idee:

- Betrachte $F : \mathbb{D}^n \to \mathbb{D}^n$ mit $F(x_1, \ldots, x_n) = (y_1, \ldots, y_n)$ wobei $y_i = f_i(x_1, \ldots, x_n)$.

Fixpunktiteration

Gesucht: möglichst kleine Lösung für:

$$x_i \sqsupseteq f_i(x_1, \ldots, x_n), \quad i = 1, \ldots, n$$

wobei alle $f_i : \mathbb{D}^n \to \mathbb{D}$ monoton sind.

Idee:

- Betrachte $F : \mathbb{D}^n \to \mathbb{D}^n$ mit
  $F(x_1, \ldots, x_n) = (y_1, \ldots, y_n)$ wobei $y_i = f_i(x_1, \ldots, x_n)$.
- Sind alle f_i monoton, dann auch F

Fixpunktiteration

Gesucht: möglichst kleine Lösung für:

$$x_i \sqsupseteq f_i(x_1, \ldots, x_n), \quad i = 1, \ldots, n$$

wobei alle $f_i : \mathbb{D}^n \to \mathbb{D}$ monoton sind.

Idee:

- Betrachte $F : \mathbb{D}^n \to \mathbb{D}^n$ mit
  $F(x_1, \ldots, x_n) = (y_1, \ldots, y_n)$ wobei $y_i = f_i(x_1, \ldots, x_n)$.
- Sind alle f_i monoton, dann auch F
- Wir approximieren sukzessive eine Lösung. Wir konstruieren:

$$\underline{\perp}, \quad F\,\underline{\perp}, \quad F^2\,\underline{\perp}, \quad F^3\,\underline{\perp}, \quad \ldots$$

Hoffnung: Wir erreichen irgendwann eine Lösung ... ?

Fixpunktiteration

Beispiel: $\mathbb{D} = 2^{\{a,b,c\}}, \quad \sqsubseteq \; = \; \subseteq$

$$
\begin{array}{lll}
x_1 & \supseteq & \{a\} \cup x_3 \\
x_2 & \supseteq & x_3 \cap \{a, b\} \\
x_3 & \supseteq & x_1 \cup \{c\}
\end{array}
$$

Fixpunktiteration

Beispiel: $\mathbb{D} = 2^{\{a,b,c\}}, \quad \sqsubseteq \,=\, \subseteq$

$$\begin{array}{lll} x_1 & \supseteq & \{a\} \cup x_3 \\ x_2 & \supseteq & x_3 \cap \{a,b\} \\ x_3 & \supseteq & x_1 \cup \{c\} \end{array}$$

Die Iteration:

	0	1	2	3	4
x_1	$\emptyset$				
x_2	$\emptyset$				
x_3	$\emptyset$				

Fixpunktiteration

Beispiel: $\mathbb{D} = 2^{\{a,b,c\}}, \quad \sqsubseteq \, = \, \subseteq$

$$\begin{array}{lll} x_1 & \supseteq & \{a\} \cup x_3 \\ x_2 & \supseteq & x_3 \cap \{a, b\} \\ x_3 & \supseteq & x_1 \cup \{c\} \end{array}$$

Die Iteration:

	0	1	2	3	4
x_1	$\emptyset$	$\{a\}$			
x_2	$\emptyset$	$\emptyset$			
x_3	$\emptyset$	$\{c\}$			

Fixpunktiteration

Beispiel: $\mathbb{D} = 2^{\{a,b,c\}}, \quad \sqsubseteq \; = \; \subseteq$

$$\begin{array}{lcl} x_1 & \supseteq & \{a\} \cup x_3 \\ x_2 & \supseteq & x_3 \cap \{a,b\} \\ x_3 & \supseteq & x_1 \cup \{c\} \end{array}$$

Die Iteration:

	0	1	2	3	4
x_1	$\emptyset$	$\{a\}$	$\{a,c\}$		
x_2	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$		
x_3	$\emptyset$	$\{c\}$	$\{a,c\}$		

Fixpunktiteration

Beispiel: $\mathbb{D} = 2^{\{a,b,c\}}, \quad \sqsubseteq \; = \; \subseteq$

$$\begin{array}{lll} x_1 & \supseteq & \{a\} \cup x_3 \\ x_2 & \supseteq & x_3 \cap \{a, b\} \\ x_3 & \supseteq & x_1 \cup \{c\} \end{array}$$

Die Iteration:

	0	1	2	3	4
x_1	$\emptyset$	$\{a\}$	$\{a, c\}$	$\{a, c\}$	
x_2	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\{a\}$	
x_3	$\emptyset$	$\{c\}$	$\{a, c\}$	$\{a, c\}$	

Fixpunktiteration

Beispiel: $\mathbb{D} = 2^{\{a,b,c\}}, \quad \sqsubseteq \, = \, \subseteq$

$$\begin{array}{lll} x_1 & \supseteq & \{a\} \cup x_3 \\ x_2 & \supseteq & x_3 \cap \{a, b\} \\ x_3 & \supseteq & x_1 \cup \{c\} \end{array}$$

Die Iteration:

	0	1	2	3	4
x_1	$\emptyset$	$\{a\}$	$\{a, c\}$	$\{a, c\}$	dito
x_2	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\{a\}$	
x_3	$\emptyset$	$\{c\}$	$\{a, c\}$	$\{a, c\}$	

Fixpunktiteration

Offenbar gilt:

- Gilt $F^k \underline{\perp} = F^{k+1} \underline{\perp}$, ist eine Lösung gefunden
- $\underline{\perp}, F\,\underline{\perp}, F^2\,\underline{\perp}, \ldots$ bilden eine aufsteigende Kette :

$$\underline{\perp} \quad \sqsubseteq \quad F\,\underline{\perp} \quad \sqsubseteq \quad F^2\,\underline{\perp} \quad \sqsubseteq \quad \ldots$$

- Sind alle aufsteigenden Ketten endlich, gibt es k immer.

Fixpunktiteration

Offenbar gilt:

- Gilt $F^k \underline{\perp} = F^{k+1} \underline{\perp}$, ist eine Lösung gefunden
- $\underline{\perp}, F\,\underline{\perp}, F^2\,\underline{\perp}, \ldots$ bilden eine aufsteigende Kette :

$$\underline{\perp} \quad \sqsubseteq \quad F\,\underline{\perp} \quad \sqsubseteq \quad F^2\,\underline{\perp} \quad \sqsubseteq \quad \ldots$$

- Sind alle aufsteigenden Ketten endlich, gibt es k immer.

Die zweite Aussage folgt mit vollständiger Induktion:

Fixpunktiteration

Offenbar gilt:

- Gilt $F^k \underline{\perp} = F^{k+1} \underline{\perp}$, ist eine Lösung gefunden
- $\underline{\perp}, F \underline{\perp}, F^2 \underline{\perp}, \ldots$ bilden eine aufsteigende Kette :

$$\underline{\perp} \quad \sqsubseteq \quad F \underline{\perp} \quad \sqsubseteq \quad F^2 \underline{\perp} \quad \sqsubseteq \quad \ldots$$

- Sind alle aufsteigenden Ketten endlich, gibt es k immer.

Die zweite Aussage folgt mit vollständiger Induktion:

Anfang: $F^0 \underline{\perp} = \underline{\perp} \sqsubseteq F^1 \underline{\perp}$

Fixpunktiteration

Offenbar gilt:

- Gilt $F^k \underline{\perp} = F^{k+1} \underline{\perp}$, ist eine Lösung gefunden
- $\underline{\perp}, F \underline{\perp}, F^2 \underline{\perp}, \ldots$ bilden eine aufsteigende Kette :

$$\underline{\perp} \quad \sqsubseteq \quad F \underline{\perp} \quad \sqsubseteq \quad F^2 \underline{\perp} \quad \sqsubseteq \quad \ldots$$

- Sind alle aufsteigenden Ketten endlich, gibt es k immer.

Die zweite Aussage folgt mit vollständiger Induktion:

Anfang: $F^0 \underline{\perp} = \underline{\perp} \sqsubseteq F^1 \underline{\perp}$

Schluss: Induktionsannahme: $F^{i-1} \underline{\perp} \sqsubseteq F^i \underline{\perp}$. Dann

$$F^i \underline{\perp} = F\,(F^{i-1} \underline{\perp}) \sqsubseteq F\,(F^i \underline{\perp}) = F^{i+1} \underline{\perp}$$

da F monoton ist

Fixpunktiteration

Fazit:

Wenn $\mathbb{D}$ endlich ist, finden wir über Fixpunktiteration mit Sicherheit eine Lösung

Fragen:

1. Gibt es eine kleinste Lösung?

Fixpunktiteration

Fazit:

Wenn $\mathbb{D}$ endlich ist, finden wir über Fixpunktiteration mit Sicherheit eine Lösung

Fragen:

1. Gibt es eine kleinste Lösung?
2. Wenn ja: findet Iteration die kleinste Lösung?

Fixpunktiteration

Fazit:

Wenn $\mathbb{D}$ endlich ist, finden wir über Fixpunktiteration mit Sicherheit eine Lösung

Fragen:

1. Gibt es eine kleinste Lösung?
2. Wenn ja: findet Iteration die kleinste Lösung?
3. Was, wenn $\mathbb{D}$ nicht endlich ist?

Kleinster Fixpunkt

Satz: Kleene

In einer vollständigen Halbordnung $\mathbb{D}$ hat jede stetige Funktion $f : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ einen kleinsten Fixpunkt d_0.
Dieser ist gegeben durch $d_0 = \bigsqcup_{k \geq 0} f^k \bot$.

Kleinster Fixpunkt

Satz: Kleene

In einer vollständigen Halbordnung $\mathbb{D}$ hat jede stetige Funktion $f : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ einen kleinsten Fixpunkt d_0.
Dieser ist gegeben durch $d_0 = \bigsqcup_{k \geq 0} f^k \bot$.

Bemerkung:

- Eine Funktion f heißt stetig, falls für jede aufsteigende Kette $d_0 \sqsubseteq \ldots \sqsubseteq d_m \sqsubseteq \ldots$ gilt: $f\left(\bigsqcup_{m \geq 0} d_m\right) = \bigsqcup_{m \geq 0} (f\ d_m)$.
- Werden alle aufsteigenden Ketten irgendwann stabil, ist jede monotone Funktion automatisch stetig

Kleinster Fixpunkt

Satz: Kleene

In einer vollständigen Halbordnung $\mathbb{D}$ hat jede stetige Funktion $f : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ einen kleinsten Fixpunkt d_0.
Dieser ist gegeben durch $d_0 = \bigsqcup_{k \geq 0} f^k \bot$.

Bemerkung:

- Eine Funktion f heißt stetig, falls für jede aufsteigende Kette $d_0 \sqsubseteq \ldots \sqsubseteq d_m \sqsubseteq \ldots$ gilt: $f\,(\bigsqcup_{m \geq 0} d_m) = \bigsqcup_{m \geq 0} (f\,d_m)$.
- Werden alle aufsteigenden Ketten irgendwann stabil, ist jede monotone Funktion automatisch stetig
- Eine Halbordnung heißt vollständig (CPO), falls alle aufsteigenden Ketten kleinste obere Schranken haben
- Jeder vollständige Verband ist auch eine vollständige Halbordnung

Kleinster Fixpunkt

Satz: Kleene

In einer vollständigen Halbordnung $\mathbb{D}$ hat jede stetige Funktion $f : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ einen kleinsten Fixpunkt $d_0 = \bigsqcup_{k\geq 0} f^k \bot$.

Beweis:

(1) $f\, d_0 = d_0$:

$$\begin{array}{rcll} f\, d_0 & = & f\left(\bigsqcup_{m\geq 0}(f^m \bot)\right) & \\ & = & \bigsqcup_{m\geq 0}(f^{m+1} \bot) & \text{wegen Stetigkeit} \\ & = & \bot \sqcup \left(\bigsqcup_{m\geq 0}(f^{m+1} \bot)\right) & \\ & = & \bigsqcup_{m\geq 0}(f^m \bot) & \\ & = & d_0 & \end{array}$$

(2) d_0 ist kleinster Fixpunkt:

Sei $f\, d_1 = d_1$ weiterer Fixpunkt. Wir zeigen: $\forall\, m \geq 0 :\ f^m \bot \sqsubseteq d_1$.

$$\begin{array}{lllcll} m = 0 : & & \bot & \sqsubseteq & d_1 & \text{nach Definition} \\ m > 0 : & \text{Gelte} & f^{m-1} \bot & \sqsubseteq & d_1 & \text{Dann folgt:} \\ & & f^m \bot & = & f\,(f^{m-1} \bot) & \\ & & & \sqsubseteq & f\, d_1 & \text{wegen Monotonie} \\ & & & = & d_1 & \end{array}$$

Kleinster Fixpunkt

Bemerkung:

- Jede stetige Funktion ist auch monoton
- Betrachte die Menge: $P = \{x \in \mathbb{D} \mid x \sqsupseteq f\,x\}$
  Der kleinste Fixpunkt d_0 ist in P und untere Schranke
  $\Longrightarrow \quad d_0 \quad$ ist der kleinste Wert x mit $x \sqsupseteq f\,x$

Kleinster Fixpunkt

Bemerkung:

- Jede stetige Funktion ist auch monoton
- Betrachte die Menge: $P = \{x \in \mathbb{D} \mid x \sqsupseteq f\,x\}$
  Der kleinste Fixpunkt d_0 ist in P und untere Schranke
  $\Longrightarrow \quad d_0 \quad$ ist der kleinste Wert x mit $x \sqsupseteq f\,x$

Anwendung:

Sei $x_i \sqsupseteq f_i(x_1, \ldots, x_n), \quad i = 1, \ldots, n \quad (*)$ ein Ungleichungssystem,
wobei alle $f_i : \mathbb{D}^n \to \mathbb{D}$ monoton sind.

Kleinster Fixpunkt

Bemerkung:

- Jede stetige Funktion ist auch monoton
- Betrachte die Menge: $P = \{x \in \mathbb{D} \mid x \sqsupseteq f\,x\}$
  Der kleinste Fixpunkt d_0 ist in P und untere Schranke
  $\Longrightarrow$ d_0 ist der kleinste Wert x mit $x \sqsupseteq f\,x$

Anwendung:

Sei $x_i \sqsupseteq f_i(x_1, \ldots, x_n), \quad i = 1, \ldots, n \quad (*)$ ein Ungleichungssystem, wobei alle $f_i : \mathbb{D}^n \to \mathbb{D}$ monoton sind.

$\Longrightarrow$ kleinste Lösung von $(*)$ $==$ kleinster Fixpunkt von F

Kleinster Fixpunkt – für First_k

Der Kleenesche Fixpunkt-Satz liefert uns nicht nur die Existenz einer kleinsten Lösung sondern auch eine Charakterisierung

Satz:

Die Mengen $\text{First}_k(\{w \in T^* \mid A \to^* w\})$, $A \in N$, sind die kleinste Lösung des Ungleichungssystems:

$$\text{First}_k(A) \quad \supseteq \quad \text{First}_k(X_1) \odot \ldots \odot \text{First}_k(X_m) \quad , \quad A \to X_1 \ldots X_m \quad \in \quad P$$

Kleinster Fixpunkt – für First_k

Der Kleenesche Fixpunkt-Satz liefert uns nicht nur die Existenz einer kleinsten Lösung sondern auch eine Charakterisierung

Satz:

Die Mengen $\text{First}_k(\{w \in T^* \mid A \to^* w\})$, $A \in N$, sind die kleinste Lösung des Ungleichungssystems:

$$\text{First}_k(A) \quad \supseteq \quad \text{First}_k(X_1) \odot \ldots \odot \text{First}_k(X_m) \quad , \quad A \to X_1 \ldots X_m \quad \in \quad P$$

Beweis-Idee: Sei $\text{F}^{(m)}(A)$ die m-te Approximation an den Fixpunkt.

1. Falls $A \to^m u$, dann $\text{First}_k(u) \subseteq \text{F}^{(m)}(A)$.
2. Falls $w \in \text{F}^{(m)}(A)$, dann $A \to^* u$ für $u \in T^*$ mit $\text{First}_k(u) = \{w\}$

Fixpunktiteration – für First$_k$

Fazit:

Wir können First$_k$ durch Fixpunkt-Iteration berechnen, d.h. durch wiederholtes Einsetzen.

Fixpunktiteration – für First_k

Fazit:

Wir können First_k durch Fixpunkt-Iteration berechnen, d.h. durch wiederholtes Einsetzen.

Achtung: Naive Fixpunkt-Iteration ist ziemlich ineffizient

Idee: Round Robin Iteration

Benutze bei der Iteration nicht die Werte der letzten Iteration, sondern die jeweils aktuellen!

Round-Robin-Iteration

Unser Mini-Beispiel: $\mathbb{D} = 2^{\{a,b,c\}}, \quad \sqsubseteq \, = \, \subseteq$

$$\begin{array}{lll} x_1 & \supseteq & \{a\} \cup x_3 \\ x_2 & \supseteq & x_3 \cap \{a, b\} \\ x_3 & \supseteq & x_1 \cup \{c\} \end{array}$$

Die Round-Robin-Iteration:

	1	2	3
x_1	$\{a\}$	$\{a, c\}$	dito
x_2	$\emptyset$	$\{a\}$	
x_3	$\{a, c\}$	$\{a, c\}$	

Round-Robin-Iteration

Der Code für Round Robin Iteration sieht so aus:

$$
\begin{array}{l}
\textsf{for}\ (i = 1; i \leq n; i{+}{+})\ x_i = \bot; \\
\textsf{do}\ \{ \\
\qquad \mathit{finished} = \textsf{true}; \\
\qquad \textsf{for}\ (i = 1; i \leq n; i{+}{+})\ \{ \\
\qquad\qquad \mathit{new} = f_i(x_1, \ldots, x_n); \\
\qquad\qquad \textsf{if}\ (!(x_i \sqsupseteq \mathit{new}))\ \{ \\
\qquad\qquad\qquad \mathit{finished} = \textsf{false}; \\
\qquad\qquad\qquad x_i = x_i \sqcup \mathit{new}; \\
\qquad\qquad \} \\
\qquad \} \\
\}\ \textsf{while}\ (!\mathit{finished});
\end{array}
$$

Round-Robin-Iteration

Zur Korrektheit:

Sei $y_i^{(d)}$ die i-te Komponente von $F^d\,\underline{\perp}$.
Sei $x_i^{(d)}$ der Wert von x_i nach der i-ten RR-Iteration.

Man zeigt:

1. $y_i^{(d)} \sqsubseteq x_i^{(d)}$

Round-Robin-Iteration

Zur Korrektheit:

Sei $y_i^{(d)}$ die i-te Komponente von $F^d\,\underline{\perp}$.
Sei $x_i^{(d)}$ der Wert von x_i nach der i-ten RR-Iteration.

Man zeigt:

1. $y_i^{(d)} \sqsubseteq x_i^{(d)}$
2. $x_i^{(d)} \sqsubseteq z_i$ für jede Lösung $(z_1, \ldots, z_n)$

Round-Robin-Iteration

Zur Korrektheit:

Sei $y_i^{(d)}$ die i-te Komponente von $F^d\,\underline{\perp}$.
Sei $x_i^{(d)}$ der Wert von x_i nach der i-ten RR-Iteration.

Man zeigt:

1. $y_i^{(d)} \sqsubseteq x_i^{(d)}$
2. $x_i^{(d)} \sqsubseteq z_i$ für jede Lösung $(z_1, \ldots, z_n)$
3. Terminiert RR-Iteration nach d Runden, ist
   $(x_1^{(d)}, \ldots, x_n^{(d)})$ eine Lösung

Round-Robin-Iteration – für First$_2$

$$\begin{array}{lclcl}
\text{First}_2(E) & \supseteq & \text{First}_2(E) \odot \{+\} \odot \text{First}_2(T) & \cup & \text{First}_2(T) \\
\text{First}_2(T) & \supseteq & \text{First}_2(T) \odot \{*\} \odot \text{First}_2(F) & \cup & \text{First}_2(F) \\
\text{First}_2(F) & \supseteq & \{(\} \odot \text{First}_2(E) \odot \{)\} & \cup & \{\text{name}, \text{int}\}
\end{array}$$

Die RR-Iteration:

First$_2$	1	2	3
F	name, int	(name, (int	((
T	name, int	(name, (int, name $*$, int $*$	((
E	name, int	(name, (int, name $*$, int $*$, name $+$, int $+$	((

Der Einfachkeit halber haben wir in jeder Iteration nur die neuen Elemente vermerkt.

Round-Robin-Iteration – für First_2

Diskussion:

- Die Länge h der längsten echt aufsteigenden Kette nennen wir auch Höhe von $\mathbb{D}$ ...
- Im Falle von First_k ist die Höhe des Verbands exponentiell in k
- Die Anzahl der Runden von RR-Iteration ist beschränkt durch $\mathcal{O}(n \cdot h)$ (n die Anzahl der Variablen)
- Die praktische Effizienz von RR-Iteration hängt allerdings auch von der Anordnung der Variablen ab
- Anstelle von RR-Iteration gibt es auch schnellere Fixpunkt-Verfahren, die aber im schlimmsten Fall immer noch exponentiell sind

$\Longrightarrow$ Man beschränkt sich i.a. auf kleine k !

Kapitel 6:

Top-down Parsing

Topdown Parsing

Ziel: Konstruiere für eine kontextfreie Grammatik und ein Wort $w \in T^*$ einen Ableitungsbaum für w, falls ein solcher existiert.

Idee:

- Benutze den Item-Kellerautomaten.
- Benutze die nächsten k Zeichen, um die Regeln für die Expansionen zu bestimmen
- Eine Grammatik ist $LL(k)$, falls dies immer eindeutig möglich ist.

Topdown Parsing

Ziel: Konstruiere für eine kontextfreie Grammatik und ein Wort $w \in T^*$ einen Ableitungsbaum für w, falls ein solcher existiert.

Idee:

- Benutze den Item-Kellerautomaten.
- Benutze die nächsten k Zeichen, um die Regeln für die Expansionen zu bestimmen
- Eine Grammatik ist $LL(k)$, falls dies immer eindeutig möglich ist.

Definition:

Eine reduzierte kontextfreie Grammatik ist genau dann $LL(k)$, wenn für je zwei verschiedene Regeln $A \to \alpha\ ,\quad A \to \alpha' \ \in\ P$ und jede Linksableitung $S \to_L^* u\, A\, \beta$ mit $u \in T^*$ gilt:

$$\text{First}_k(\alpha\,\beta)\ \cap\ \text{First}_k(\alpha'\,\beta) = \emptyset$$

$LL(k)$ steht für Left-to-right parsing, Leftmost derivation, und Vorrausschau der Länge k.

Topdown Parsing

Intuition:

Wir wollen für das Eingabewort $w \in T^*$ eine Linksableitung konstruieren (entspricht der Konstruktion eines Ableitungsbaums).

Sei $S \to_L^* u\,A\,\beta$ der schon konstruierte Teil der Linksableitung; insbesondere ist u ein Präfix von w: $w = u\,v$ mit $v \in T^*$.

Wir müssen als nächstes eine Regel für A auswählen. Aber welche nehmen wir?

Sei $v = v_1 v_2$ mit $|v_1| = k$ oder $|v_1| < k$ und $v_2 = \epsilon$ (die k nächsten Zeichen in der Eingabe), d.h. $\mathrm{First}_k(\{v\}) = \{v_1\}$.

Die $LL(k)$ Eigenschaft erlaubt es die Regel für A durch Betrachtung von v_1 deterministisch auszuwählen.

Beachte: Eine Regel $A \to \alpha$ darf nur dann angewendet werden, wenn $v_1 \in \mathrm{First}_k(\alpha\,\beta)$ gilt (v muss ja aus $\alpha\,\beta$ abgeleitet werden).

Auf Grund der $LL(k)$ Eigenschaft gibt es aber höchstens eine Regel $A \to \alpha$ mit dieser Eigenschaft.

Topdown Parsing

Beispiel 1: (if, else, while, id, (,), ; sind einzelne Terminalsymbole)

$$\begin{array}{lcl} S & \to & \text{if } (\; E \;) \; S \text{ else } S \quad | \\ & & \text{while } (\; E \;) \; S \quad | \\ & & E \; ; \\ E & \to & \text{id} \end{array}$$

ist $LL(1)$, da $\text{First}_1(E) = \{\text{id}\}$

Topdown Parsing

Beispiel 1: (if, else, while, id, (,), ; sind einzelne Terminalsymbole)

$$
\begin{array}{lll}
S & \to & \text{if } (\; E \;) \; S \text{ else } S \quad | \\
 & & \text{while } (\; E \;) \; S \quad | \\
 & & E \; ; \\
E & \to & \text{id}
\end{array}
$$

ist $LL(1)$, da First$_1(E) = \{\text{id}\}$

Beispiel 2:

$$
\begin{array}{lll}
S & \to & \text{if } (\; E \;) \; S \text{ else } S \quad | \\
 & & \text{if } (\; E \;) \; S \quad | \\
 & & \text{while } (\; E \;) \; S \quad | \\
 & & E \; ; \\
E & \to & \text{id}
\end{array}
$$

... ist nicht $LL(k)$ für jedes $k > 0$.

Topdown Parsing

Begründung:

Betrachte die triviale Linksableitung $S \rightarrow_L^* S$ (d.h. $S \rightarrow_L^* u\,A\,\beta$ mit $u = \epsilon$, $A = S$ und $\beta = \epsilon$) und die beiden Regeln

$$S \rightarrow \text{if } (\; E \;) \; S \text{ else } S \qquad \text{und} \qquad S \rightarrow \text{if } (\; E \;) \; S$$

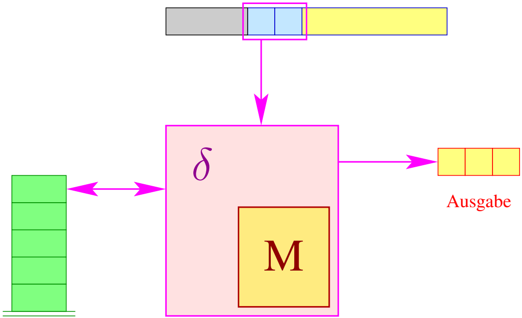
Für jedes $k \geq 1$ gilt

$$\text{First}_k(\text{if } (\; E \;) \; S \text{ else } S) \cap \text{First}_k(\text{if } (\; E \;) \; S) \;\neq\; \emptyset$$

denn beide First_k-Mengen enthalten das Anfangstück der Länge k von

$$\text{if } (\text{ id }) \text{ if } (\text{ id }) \text{ if } (\text{ id }) \; \cdots$$

Struktur des $LL(k)$-Parsers:



- Der Parser sieht ein Fenster der Länge k der Eingabe;
- er realisiert im Wesentlichen den Item-Kellerautomaten;
- die Tabelle $M[q, w]$ enthält die jeweils zu wählende Regel

Topdown Parsing

... im Beispiel ($k = 1$):

$$\begin{array}{lll} S & \to & \text{if } (E) \, S \text{ else } S \;^{0} \quad | \\ & & \text{while } (E) \, S \;^{1} \quad | \\ & & E \, ; \;^{2} \\ E & \to & \text{id} \;^{0} \end{array}$$

Zustände: Items

Tabelle:

	if	while	id
$[\ldots \to \ldots \bullet S \ldots]$	0	1	2
$[\ldots \to \ldots \bullet E \ldots]$	–	–	0

Topdown Parsing

Erinnerung: Der Item-Kellerautomat konstruiert eine Linksableitung des Eingabeworts w.

Die Expansionen (oberstes Item auf dem Keller ist von der Form $[\ldots \to \ldots \bullet A \ldots]$) sind die Schritte, wo die Linksableitung durch Auswahl einer Regel $A \to \alpha$ erweitert wird.

Angenommen die bis zu dieser Expansion konstruierte Linksableitung ist $S \to_L^* u\, A\, \beta$.

Dann kann die Regel $A \to \alpha$ bei der Expansion ausgewählt werden, wenn die k nächsten Eingabezeichen (das Vorausschaufenster) zu $\text{First}_k(\alpha\,\beta) \;=\; \text{First}_k(\alpha) \odot \text{First}_k(\beta)$ gehören.

β ist der rechte Kontext von A in der Linksableitung $S \to_L^* u\, A\, \beta$.

Wir müssen den Item-Kellerautomaten so erweitern, dass die Menge $\text{First}_k(\beta) \subseteq T^{\leq k}$ dynamisch akkumuliert wird.

$\Longrightarrow$ Wir erweitern Items um Vorausschau-Mengen ...

Erweiterte Items

Ein erweitertes Item ist ein Paar: $[A \to \alpha \bullet \gamma\,,\ L]\ (A \to \alpha\,\gamma\ \in\ P,\ L \subseteq T^{\leq k})$

Die Menge L (eine Menge von Terminalwörtern der Länge höchstens k) benutzen wir, um $\text{First}_k(\beta)$ für den rechten Kontext β von A zu repräsentieren.

Konstruktion:

Zustände: erweiterte Items

Anfangszustand: $[S' \to\ \bullet\ S,\ \{\epsilon\}]$

Endzustand: $[S' \to\ S\,\bullet,\ \{\epsilon\}]$

Übergänge:

Expansion: $([A \to \alpha \bullet B\,\beta\,,\ L], \epsilon, [A \to \alpha \bullet B\,\beta\,,\ L]\ [B \to\ \bullet\gamma\,,\boxed{\text{First}_k(\beta)\ \odot\ L}\,])$
für $A\ \to\ \alpha\,B\,\beta,\ B \to \gamma\ \in\ P$

Shift: $([A \to \alpha \bullet a\,\beta\,,\ L], a, [A \to \alpha\,a \bullet \beta\,,\ L])$
für $A \to \alpha\,a\,\beta\ \in\ P$

Reduce: $([A \to \alpha \bullet B\,\beta\,,\ L]\ [B \to \gamma\bullet\,,\ L'], \epsilon, [A \to \alpha\,B \bullet \beta\,,\ L])$
für $A \to \alpha\,B\,\beta,\ B \to \gamma\ \in\ P$

Erweiterte Items

Erklärung:

Angenommen das oberste (erweiterte) Item ist $[A \to \alpha \bullet B\,\beta\,,\, L]$, d.h. eine Expansion steht an.

Die bis zur dieser Expansion konstruierte Linksableitung ist von der Form

$$S \to_L^* u\,A\,\beta' \to_L u\,\alpha\,B\,\beta\,\beta' \to_L^* u\,v\,B\,\beta\,\beta'$$

wobei v aus α abgeleitet wurde.

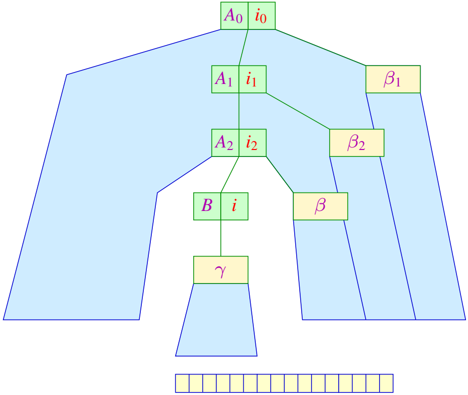
Dann gilt $L = \text{First}_k(\beta')$: β' ist der rechte Kontext von A.

Der rechte Kontext von B ist $\beta\,\beta'$ und es gilt

$$\text{First}_k(\beta\,\beta') = \text{First}_k(\beta) \odot \text{First}_k(\beta') = \text{First}_k(\beta) \odot L$$

Daher muss bei der Expansion das erweiterte Item $[B \to \bullet\,\gamma,\, \text{First}_k(\beta) \odot L]$ auf den Keller abgelegt werden.

Vorausschau-Tabelle



Die Vorausschau-Tabelle: Wir setzen

$$M[[A \to \alpha \bullet B\,\beta, L], w] = \{i \mid (B, i) = (B \;\to\; \gamma), w \in \mathsf{First}_k(\gamma) \odot \mathsf{First}_k(\beta) \odot L\}$$

Vorausschau-Tabelle

Erklärung: Betrachte die Situation von Folie 177.

Das oberste erweitere Item ist $[A \to \alpha \bullet B\,\beta\,,\,L]$ und die bisher konstruierte Linksableitung ist

$$S \to_L^* u\,A\,\beta' \to_L^* u\,v\,B\,\beta\,\beta'$$

Angenommen für die anstehende Expansion wird die Regel $B \to \gamma$ ausgewählt.

Dann erhalten wir die Linksableitung

$$S \to_L^* u\,A\,\beta' \to_L^* u\,v\,B\,\beta\,\beta' \to_L^* u\,v\,\gamma\,\beta\,\beta'$$

Der restliche Teil der Einabe muss also aus $\gamma\,\beta\,\beta'$ abgeleitet werden.

Insbesondere: Wenn w der aktuelle Inhalt des Vorausschaufensters ist (die nächsten k Symbole von der Eingabe), dann muss gelten:

$$w \in \mathsf{First}_k(\gamma\,\beta\,\beta') = \mathsf{First}_k(\gamma) \odot \mathsf{First}_k(\beta) \odot L$$

Daher ist $M[[A \to \alpha \bullet B\,\beta, L], w]$ die Menge aller Regeln für B die auf Grund der k nächsten Eingabesymbole möglich sind.

LL(k)-Grammatik

Satz (ohne Beweis):

Die reduzierte kontextfreie Grammatik G ist $LL(k)$ genau dann wenn für jedes Eingabewort zu jedem Zeitpunkt in der Berechnung des erweiterten Item-Kellerautomaten $|M[[A \to \alpha \bullet B\,\beta\,,\,L], w]| \leq 1$ gilt.

Hierbei ist $[A \to \alpha \bullet B\,\beta\,,\,L]$ das aktuelle oberste Kellersymbol und w besteht aus den nächsten k Zeichen (oder $k' < k$ Zeichen, falls der noch zu lesende Teil der Eingabe Länge $k' < k$ hat) der Eingabe.

Diskussion:

- Der erweiterte Item-Kellerautomat zusammen mit einer k-Vorausschau-Tabelle erlaubt die deterministische Rekonstruktion einer Links-Ableitung für eine $LL(k)$ Grammatik.
- Die Anzahl der Vorausschau-Mengen L kann sehr groß sein

LL(k)-Grammatik

Beispiel: $S \to \epsilon \quad | \quad a\,S\,b$

Die Übergänge des erweiterten Item-Kellerautomaten für $k = 1$
(nur die benötigten Übergänge sind angegeben):

0	$[S' \to \bullet\, S, \{\epsilon\}]$	ϵ	$[S' \to \bullet\, S, \{\epsilon\}]\ [S \to \bullet, \{\epsilon\}]$
1	$[S' \to \bullet\, S, \{\epsilon\}]$	ϵ	$[S' \to \bullet\, S, \{\epsilon\}]\ [S \to \bullet\, a\,S\,b, \{\epsilon\}]$
2	$[S \to \bullet\, a\,S\,b, \{\epsilon\}]$ $[S \to \bullet\, a\,S\,b, \{b\}]$	a a	$[S \to a \bullet S\,b, \{\epsilon\}]$ $[S \to a \bullet S\,b, \{b\}]$
3	$[S \to a \bullet S\,b, \{\epsilon\}]$ $[S \to a \bullet S\,b, \{b\}]$	ϵ ϵ	$[S \to a \bullet S\,b, \{\epsilon\}]\ [S \to \bullet, \{b\}]$ $[S \to a \bullet S\,b, \{b\}]\ [S \to \bullet, \{b\}]$
4	$[S \to a \bullet S\,b, \{\epsilon\}]$ $[S \to a \bullet S\,b, \{b\}]$	ϵ ϵ	$[S \to a \bullet S\,b, \{\epsilon\}]\ [S \to \bullet\, a\,S\,b, \{b\}]$ $[S \to a \bullet S\,b, \{b\}]\ [S \to \bullet\, a\,S\,b, \{b\}]$
5	$[S \to a \bullet S\,b, \{\epsilon\}]\ [S \to \bullet, \{b\}]$ $[S \to a \bullet S\,b, \{b\}]\ [S \to \bullet, \{b\}]$	ϵ ϵ	$[S \to a\,S \bullet b, \{\epsilon\}]$ $[S \to a\,S \bullet b, \{b\}]$
	$\ldots$		$\ldots$

LL(k)-Grammatik

	$\ldots$		$\ldots$
6	$[S \to a \bullet S\, b, \{\epsilon\}]\ [S \to a\, S\, b \bullet, \{b\}]$	ϵ	$[S \to a\, S \bullet b, \{\epsilon\}]$
	$[S \to a \bullet S\, b, \{b\}]\ [S \to a\, S\, b \bullet, \{b\}]$	ϵ	$[S \to a\, S \bullet b, \{b\}]$
7	$[S \to a\, S \bullet b, \{\epsilon\}]$	b	$[S \to a\, S\, b \bullet, \{\epsilon\}]$
	$[S \to a\, S \bullet b, \{b\}]$	b	$[S \to a\, S\, b \bullet, \{b\}]$
8	$[S' \to \bullet S, \{\epsilon\}]\ [S \to \bullet, \{\epsilon\}]$	ϵ	$[S' \to S \bullet, \{\epsilon\}]$
9	$[S' \to \bullet S, \{\epsilon\}]\ [S \to a\, S\, b \bullet, \{\epsilon\}]$	ϵ	$[S' \to S \bullet, \{\epsilon\}]$

Die Vorausschau-Tabelle:

	ϵ	a	b
$[S' \to \bullet S, \{\epsilon\}]$	0	1	–
$[S \to a \bullet S\, b, \{\epsilon\}]$	–	1	0
$[S \to a \bullet S\, b, \{b\}]$	–	1	0

Starke LL(k)-Grammatiken

Beobachtung:

- Im letzten Beispiel hängt die auszuwählende Regel nicht von den Erweiterungen der Items ab!
- Unter dieser Voraussetzung können wir den Item-Kellerautomaten ohne Erweiterung benutzen.
- Hängt die auszuwählende Regel nur von der aktuellen Vorausschau w ab, nennen wir G auch stark $LL(k)$.

Definition:

$$\text{Follow}_k(A) \;=\; \{w \in T^{\leq k} \mid \exists \beta \in (N \cup T)^* : w \in \text{First}_k(\beta) \text{ und } S \rightarrow_L^* u\,A\,\beta\}$$

Für die obige Menge

$$\{w \in T^{\leq k} \mid \exists \beta \in (N \cup T)^* : w \in \text{First}_k(\beta) \text{ und } S \rightarrow_L^* u\,A\,\beta\}$$

schreiben wir auch kurz

$$\bigcup \{\text{First}_k(\beta) \mid S \rightarrow_L^* u\,A\,\beta\}$$

Starke LL(k)-Grammatiken

Definition:

Die reduzierte kontextfreie Grammatik G heißt stark $LL(k)$, falls für je zwei verschiedene $A \to \alpha\,,\ A \to \alpha' \ \in\ P$:

$$\text{First}_k(\alpha) \odot \text{Follow}_k(A) \ \cap\ \text{First}_k(\alpha') \odot \text{Follow}_k(A) \ =\ \emptyset$$

Im Beispiel: $\quad S \to \epsilon \quad | \quad a\,S\,b$

$$\begin{array}{lcl} \text{Follow}_1(S) & = & \{\epsilon, b\} \\ \text{First}_1(\epsilon) \odot \text{Follow}_1(S) & = & \{\epsilon\} \odot \{\epsilon, b\} \quad = \quad \{\epsilon, b\} \\ \text{First}_1(a\,S\,b) \odot \text{Follow}_1(S) & = & \{a\} \odot \{\epsilon, b\} \quad = \quad \{a\} \end{array}$$

Wir schließen: Die Grammatik ist in der Tat stark $LL(1)$

Starke LL(k)-Grammatiken

Erläuterung: Wir wollen wieder eine Linksableitung für ein Terminalwort $w \in T^*$ produzieren.

Sei $S \rightarrow_L^* u\,A\,\beta$ der schon konstruierte Teil der Linksableitung; insbesondere ist u ein Präfix von w: $w = u\,v$ mit $v \in T^*$.

Sei weiter $v = v_1 v_2$ mit $|v_1| = k$ oder $|v_1| < k$ und $v_2 = \epsilon$ (die k nächsten Zeichen in der Eingabe).

Die Linksableitung $S \rightarrow_L^* u\,A\,\beta$ darf nur dann mit der Regel $A \rightarrow \gamma$ erweitert werden, wenn $v_1 \in \mathrm{First}_k(\gamma\,\beta)$ gilt (v muss ja aus $\gamma\,\beta$ abgeleitet werden).

Es gilt aber $\mathrm{First}_k(\gamma\,\beta) = \mathrm{First}_k(\gamma) \odot \mathrm{First}_k(\beta) \subseteq \mathrm{First}_k(\gamma) \odot \mathrm{Follow}_k(A)$.

Die stark $LL(k)$ Eigenschaft garantiert, dass es höchstens eine Regel $A \rightarrow \gamma$ mit $v_1 \in \mathrm{First}_k(\gamma) \odot \mathrm{Follow}_k(A)$ gibt.

Nur diese Regel kann also angwendet werden.

Starke LL(k)-Grammatiken

Ist G eine starke $LL(k)$-Grammatik, können wir die Vorausschau-Tabelle statt mit (erweiterten) Items mit Nichtterminalen indizieren:

$$M[B,\ w] \ := \begin{cases} i & \text{falls } (B, i) = (B \to \gamma) \text{ und } w \in \mathsf{First}_k(\gamma) \odot \mathsf{Follow}_k(B) \\ \text{-} & \text{falls solch eine Regel nicht existiert} \end{cases}$$

$M[B,\ w]$ ist im ersten Fall die eindeutige Regel die bei einer Expansion für ein Item der Form $[A \to \alpha \bullet B\beta]$ angewendet werden muss, falls der Inhalt des Vorausschaufensters w ist.

Im Beispiel: $k = 1$ und $S \to \epsilon \quad | \quad a\,S\,b$

	ϵ	a	b
S	0	1	0

Satz:

- Jede starke $LL(k)$-Grammatik ist auch $LL(k)$.
- Jede $LL(1)$-Grammatik ist bereits stark $LL(1)$.

Starke LL(k)-Grammatiken

Satz: Teil 1

- Jede starke $LL(k)$-Grammatik ist auch $LL(k)$.

Beweis:

Sei G stark $LL(k)$.

Betrachte eine Ableitung $S \rightarrow_L^* u\, A\, \beta$ und Regeln $A \rightarrow \alpha\,,\ A \rightarrow \alpha' \ \in\ P$.

Dann haben wir:

$$\begin{array}{rcl} \mathsf{First}_k(\alpha\,\beta)\ \cap\ \mathsf{First}_k(\alpha'\,\beta) & = & \mathsf{First}_k(\alpha) \odot \mathsf{First}_k(\beta)\ \cap\ \mathsf{First}_k(\alpha') \odot \mathsf{First}_k(\beta) \\ & \subseteq & \mathsf{First}_k(\alpha) \odot \mathsf{Follow}_k(A)\ \cap\ \mathsf{First}_k(\alpha') \odot \mathsf{Follow}_k(A) \\ & = & \emptyset \end{array}$$

Also gilt auch $\mathsf{First}_k(\alpha\,\beta)\ \cap\ \mathsf{First}_k(\alpha'\,\beta) = \emptyset$ und G ist $LL(k)$ $\square$

Starke LL(k)-Grammatiken

Satz: **Teil 2**

- Jede $LL(1)$-Grammatik ist bereits stark $LL(1)$.

Beweis:

Sei G $LL(1)$.

Betrachte zwei verschiedene Regeln $A \to \alpha\,,\ A \to \alpha' \ \in \ P$.

Fall 1: $\epsilon \in \mathrm{First}_1(\alpha) \cap \mathrm{First}_1(\alpha')$.
Betrachte eine beliebige Linksableitung der Form $S \to_L^* u\,A\,\beta$
(muss es geben, da jede $LL(k)$-Grammatik reduziert ist!)

$$\begin{aligned}
\mathrm{First}_1(\alpha\beta) \cap \mathrm{First}_1(\alpha'\beta) &= \mathrm{First}_1(\alpha) \odot \mathrm{First}_1(\beta) \cap \mathrm{First}_1(\alpha') \odot \mathrm{First}_1(\beta) \\
&\supseteq \{\epsilon\} \odot \mathrm{First}_1(\beta) \cap \{\epsilon\} \odot \mathrm{First}_1(\beta) \\
&= \mathrm{First}_1(\beta) \\
&\neq \emptyset
\end{aligned}$$

Also kann G nicht $LL(1)$ sein — Widerspruch!

Starke LL(k)-Grammatiken

Satz: Teil 2

- Jede $LL(1)$-Grammatik ist bereits stark $LL(1)$

Beweis:

Fall 2: $\epsilon \notin \text{First}_1(\alpha) \cup \text{First}_1(\alpha')$.
Dann gilt für jede Menge $L \subseteq T^{\leq 1}$:

$$\text{First}_1(\alpha) \odot L = \text{First}_1(\alpha) \quad \text{und} \quad \text{First}_1(\alpha') \odot L = \text{First}_1(\alpha')$$

Betrachte wieder eine Linksableitung $S \to_L^* u\, A\, \beta$.

Da G $LL(1)$ ist, gilt:

$$\begin{aligned} \text{First}_1(\alpha) \odot \text{Follow}_1(A) \cap \text{First}_1(\alpha') \odot \text{Follow}_1(A) \\ &= \text{First}_1(\alpha) \cap \text{First}_1(\alpha') \\ &= \text{First}_1(\alpha) \odot \text{First}_1(\beta) \cap \text{First}_1(\alpha') \odot \text{First}_1(\beta) \\ &= \emptyset \end{aligned}$$

Starke LL(k)-Grammatiken

Satz: Teil 2

- Jede $LL(1)$-Grammatik ist bereits stark $LL(1)$

Beweis:

Fall 3: $\epsilon \in \text{First}_1(\alpha)$ und $\epsilon \notin \text{First}_1(\alpha')$.
Wieder gilt $\text{First}_1(\alpha') \odot L = \text{First}_1(\alpha')$ für alle $L \subseteq T^{\leq 1}$ und somit:

$$
\begin{aligned}
&\text{First}_1(\alpha) \odot \text{Follow}_1(A) \cap \text{First}_1(\alpha') \odot \text{Follow}_1(A) \\
&\quad = \text{First}_1(\alpha) \odot \text{Follow}_1(A) \cap \text{First}_1(\alpha') \\
&\quad = \text{First}_1(\alpha) \odot (\bigcup\{\text{First}_1(\beta) \mid S \to_L^* u\,A\,\beta\}) \cap \text{First}_1(\alpha') \\
&\quad = (\bigcup\{\text{First}_1(\alpha) \odot \text{First}_1(\beta) \mid S \to_L^* u\,A\,\beta\}) \cap \text{First}_1(\alpha') \\
&\quad = \bigcup\{\text{First}_1(\alpha) \odot \text{First}_1(\beta) \cap \text{First}_1(\alpha') \mid S \to_L^* u\,A\,\beta\} \\
&\quad = \bigcup\{\emptyset \mid S \to_L^* u\,A\,\beta\} \\
&\quad = \emptyset
\end{aligned}
$$

Fall 4: $\epsilon \notin \text{First}_1(\alpha)$ und $\epsilon \in \text{First}_1(\alpha')$: analog

Starke LL(k)-Grammatiken

Beispiel:

$$
\begin{array}{lcl}
S & \to & a\,A\,a\,a\;^{0} \;\mid\; b\,A\,b\,a\;^{1} \\
A & \to & b\;^{0} \;\mid\; \epsilon\;^{1}
\end{array}
$$

Offenbar ist die Grammatik $LL(2)$ – andererseits gilt:

$$
\begin{array}{ll}
\multicolumn{2}{l}{\text{First}_2(b) \odot \text{Follow}_2(A) \;\cap\; \text{First}_2(\epsilon) \odot \text{Follow}_2(A)} \\
= & \{b\} \odot \{a\,a\,,\; b\,a\} \;\cap\; \{\epsilon\} \odot \{a\,a\,,\; b\,a\} \\
= & \{b\,a\,,\; b\,b\} \;\cap\; \{a\,a\,,\; b\,a\} \\
\neq & \emptyset
\end{array}
$$

Folglich ist die Grammatik nicht stark $LL(2)$

Starke LL(k)-Grammatiken

Beispiel:

$$\begin{array}{lcl} S & \to & a\,A\,a\,a^{\,0} \;\mid\; b\,A\,b\,a^{\,1} \\ A & \to & b^{\,0} \;\mid\; \epsilon^{\,1} \end{array}$$

Offenbar ist die Grammatik $LL(2)$ – andererseits gilt:

$$\begin{array}{rl} \multicolumn{2}{l}{\text{First}_2(b) \odot \text{Follow}_2(A) \;\cap\; \text{First}_2(\epsilon) \odot \text{Follow}_2(A)} \\ = & \{b\} \odot \{a\,a\,,\; b\,a\} \;\cap\; \{\epsilon\} \odot \{a\,a\,,\; b\,a\} \\ = & \{b\,a\,,\; b\,b\} \;\cap\; \{a\,a\,,\; b\,a\} \\ \neq & \emptyset \end{array}$$

Folglich ist die Grammatik nicht stark $LL(2)$

Wir schließen: Für $k > 1$ ist nicht jede $LL(k)$-Grammatik automatisch stark $LL(k)$.

Ohne Beweis: Zu jeder $LL(k)$-Grammatik kann jedoch eine äquivalente starke $LL(k)$-Grammatik konstruiert werden.

Berechnung von $\text{Follow}_k(B)$

Idee:

1. Wir stellen ein Ungleichungssystem auf
2. ϵ ist ein möglicher rechter Kontext von S
3. Mögliche rechte Kontexte der linken Seite einer Regel propagieren wir ans Ende jeder rechten Seite.

Im Beispiel: $S \to \epsilon \quad | \quad a\,S\,b$

$$\begin{array}{lll} \text{Follow}_k(S) & \supseteq & \{\epsilon\} \\ \text{Follow}_k(S) & \supseteq & \{b\} \odot \text{Follow}_k(S) \end{array}$$

Berechnung von $\text{Follow}_k(B)$

Allgemein:

$$\begin{array}{lcl} \text{Follow}_k(S) & \supseteq & \{\epsilon\} \\ \text{Follow}_k(B) & \supseteq & \text{First}_k(X_1) \odot \cdots \odot \text{First}_k(X_m) \odot \text{Follow}_k(A) \\ & & \text{für} \quad A \to \alpha\, B\, X_1 \cdots X_m \ \in \ P,\ X_1, \ldots, X_m \in N \cup T \end{array}$$

Erläuterung:

- $\text{Follow}_k(S) \supseteq \{\epsilon\}$ gilt wegen der trivialen Linksableitung $S \to_L^* S$
- Sei nun $A \to \alpha\, B\, X_1 \cdots X_m$ ein Regel und gelte

$$\begin{array}{rcl} w & \in & \text{First}_k(X_1) \odot \cdots \odot \text{First}_k(X_m) \odot \text{Follow}_k(A) \\ & = & \text{First}_k(X_1 \cdots X_m) \odot \text{Follow}_k(A) \end{array}$$

Also gibt es $u \in \text{First}_k(X_1 \cdots X_m)$ und $v \in \text{Follow}_k(A)$ mit $w = u \odot v$

Es gibt also eine Linksableitung $S \to_L^* u'\, A\, \beta$ mit $v \in \text{First}_k(\beta)$.

Also ist auch $S \to_L^* u'\, \alpha\, B\, X_1 \cdots X_m\, \beta$ eine Linksableitung und es gilt

$$\begin{array}{rcl} w = u \odot v & \in & \text{First}_k(X_1 \cdots X_m) \odot \text{First}_k(\beta) \\ & = & \text{First}_k(X_1 \cdots X_m\, \beta) \subseteq \text{Follow}_k(B) \end{array}$$

Berechnung von $\text{Follow}_k(B)$

Diskussion:

- Man überzeugt sich, dass die kleinste Lösung dieses Ungleichungssystems tatsächlich die Mengen $\text{Follow}_k(B)$ liefert
- Die kleinste Lösung des Ungleichungssystems kann wie auf Folie 141 berechnet werden. Dazu müssen zunächst alle First_k-Mengen berechnet werden.
- Die Größe der auftretenden Mengen steigt mit k rapide
- In praktischen Systemen wird darum meist nur der Fall $k = 1$ implementiert ...

Kapitel 7:

Schnelle Berechnung von Vorausschau-Mengen

Schnelle Berechnung von Vorausschau-Mengen

Im Fall $k = 1$ lassen sich First und Follow besonders effizient berechnen

Beobachtung:

Seien $L_1, L_2 \subseteq T \cup \{\epsilon\}$ mit $L_1 \neq \emptyset \neq L_2$. Dann ist:

$$L_1 \odot L_2 = \begin{cases} L_1 & \text{falls} \quad \epsilon \notin L_1 \\ (L_1 \backslash \{\epsilon\}) \cup L_2 & \text{falls} \quad \epsilon \in L_1 \end{cases}$$

Ist G reduziert, sind alle Mengen $\text{First}_1(A)$ nichtleer.

Schnelle Berechnung von Vorausschau-Mengen

Idee:

- Behandle ϵ separat!

  Sei empty$(X) =$ true gdw. $X \rightarrow^* \epsilon$.

- Definiere die ϵ-freien First$_1$-Mengen

$$\begin{array}{lcll} F_\epsilon(a) & = & \{a\} & \text{für} \quad a \in T \\ F_\epsilon(A) & = & \text{First}_1(A) \backslash \{\epsilon\} & \text{für} \quad A \in N \end{array}$$

Schnelle Berechnung von Vorausschau-Mengen

Konstruiere direkt ein Ungleichungssystem für $F_\epsilon(A)$:

$$F_\epsilon(A) \quad \supseteq \quad F_\epsilon(X_j) \qquad \text{falls} \qquad \begin{array}{l} A \to X_1 \dots X_m \; \in P, \; 1 \le j \le m, \\ \text{empty}(X_1) \; \wedge \cdots \wedge \; \text{empty}(X_{j-1}) \end{array}$$

Schnelle Berechnung von Vorausschau-Mengen

Konstruiere direkt ein Ungleichungssystem für $F_\epsilon(A)$:

$$F_\epsilon(A) \quad \supseteq \quad F_\epsilon(X_j) \qquad \text{falls} \quad A \to X_1 \dots X_m \in P,\ 1 \leq j \leq m, \quad \text{empty}(X_1) \wedge \dots \wedge \text{empty}(X_{j-1})$$

im Beispiel...

$$\begin{array}{lllll} E & \to & E + T & \mid & T \\ T & \to & T * F & \mid & F \\ F & \to & (\ E\ ) & \mid & \text{name} \quad \mid \quad \text{int} \end{array}$$

wobei $\text{empty}(E) = \text{empty}(T) = \text{empty}(F) = \text{false}$.

Schnelle Berechnung von Vorausschau-Mengen

Konstruiere direkt ein Ungleichungssystem für $F_\epsilon(A)$:

$$F_\epsilon(A) \quad \supseteq \quad F_\epsilon(X_j) \qquad \text{falls} \qquad \begin{array}{l} A \to X_1 \ldots X_m \in P,\ 1 \leq j \leq m, \\ \text{empty}(X_1) \wedge \cdots \wedge \text{empty}(X_{j-1}) \end{array}$$

im Beispiel...

$$\begin{array}{lllllll} E & \to & E + T & \mid & T & & \\ T & \to & T * F & \mid & F & & \\ F & \to & (\ E\ ) & \mid & \text{name} & \mid & \text{int} \end{array}$$

wobei $\text{empty}(E) = \text{empty}(T) = \text{empty}(F) = \text{false}$.

... erhalten wir:

$$\begin{array}{lllllll} F_\epsilon(S') & \supseteq & F_\epsilon(E) & \qquad & F_\epsilon(E) & \supseteq & F_\epsilon(E) \\ F_\epsilon(E) & \supseteq & F_\epsilon(T) & & F_\epsilon(T) & \supseteq & F_\epsilon(T) \\ F_\epsilon(T) & \supseteq & F_\epsilon(F) & & F_\epsilon(F) & \supseteq & \{\, (\,, \text{name}, \text{int}\,\} \end{array}$$

Die Ungleichungen $F_\epsilon(E) \supseteq F_\epsilon(E)$ und $F_\epsilon(T) \supseteq F_\epsilon(T)$ können wir natürlich weglassen.

Schnelle Berechnung von Vorausschau-Mengen

Analog dazu das Ungleichungssystem zu $\text{Follow}_1(A)$:

$$
\begin{array}{lcll}
\text{Follow}_1(S) & \supseteq & \{\epsilon\} & \\
\text{Follow}_1(B) & \supseteq & F_\epsilon(X_j) & \text{falls} \quad A \to \alpha\, B\, X_1 \cdots X_m \ \in P, \\
 & & & \phantom{\text{falls} \quad} \text{empty}(X_1) \wedge \cdots \wedge \text{empty}(X_{j-1}) \\
\text{Follow}_1(B) & \supseteq & \text{Follow}_1(A) & \text{falls} \quad A \to \alpha\, B\, X_1 \cdots X_m \ \in P, \\
 & & & \phantom{\text{falls} \quad} \text{empty}(X_1) \wedge \cdots \wedge \text{empty}(X_m)
\end{array}
$$

Schnelle Berechnung von Vorausschau-Mengen

Analog dazu das Ungleichungssystem zu $\text{Follow}_1(A)$:

$$
\begin{array}{llll}
\text{Follow}_1(S) & \supseteq & \{\epsilon\} & \\
\text{Follow}_1(B) & \supseteq & F_\epsilon(X_j) & \text{falls} \quad A \to \alpha\, B\, X_1 \cdots X_m \;\in P, \\
& & & \text{empty}(X_1) \,\wedge \cdots \wedge\, \text{empty}(X_{j-1}) \\
\text{Follow}_1(B) & \supseteq & \text{Follow}_1(A) & \text{falls} \quad A \to \alpha\, B\, X_1 \cdots X_m \;\in P, \\
& & & \text{empty}(X_1) \,\wedge \cdots \wedge\, \text{empty}(X_m)
\end{array}
$$

im Beispiel...

$$
\begin{array}{lllll}
E & \to & E + T & \mid & T \\
T & \to & T * F & \mid & F \\
F & \to & (\ E\ ) & \mid & \text{name} \quad \mid \quad \text{int}
\end{array}
$$

Schnelle Berechnung von Vorausschau-Mengen

Analog dazu das Ungleichungssystem zu $\text{Follow}_1(A)$:

$$
\begin{array}{lcllll}
\text{Follow}_1(S) & \supseteq & \{\epsilon\} & & & \\
\text{Follow}_1(B) & \supseteq & F_\epsilon(X_j) & \text{falls} & A \to \alpha\, B\, X_1 \cdots X_m \in P, & \\
 & & & & \text{empty}(X_1) \wedge \cdots \wedge \text{empty}(X_{j-1}) & \\
\text{Follow}_1(B) & \supseteq & \text{Follow}_1(A) & \text{falls} & A \to \alpha\, B\, X_1 \cdots X_m \in P, & \\
 & & & & \text{empty}(X_1) \wedge \cdots \wedge \text{empty}(X_m) &
\end{array}
$$

im Beispiel...

$$
\begin{array}{lcllll}
E & \to & E + T & \mid & T & \\
T & \to & T * F & \mid & F & \\
F & \to & (\ E\ ) & \mid & \text{name} & \mid\ \text{int}
\end{array}
$$

... erhalten wir:

$$
\begin{array}{lcllcl}
\text{Follow}_1(S') & \supseteq & \{\epsilon\} & \text{Follow}_1(E) & \supseteq & \text{Follow}_1(S') \\
\text{Follow}_1(E) & \supseteq & \{+, \,)\,\} & \text{Follow}_1(T) & \supseteq & \{*\} \\
\text{Follow}_1(T) & \supseteq & \text{Follow}_1(E) & \text{Follow}_1(F) & \supseteq & \text{Follow}_1(T)
\end{array}
$$

Schnelle Berechnung von Vorausschau-Mengen

Beobachtung:

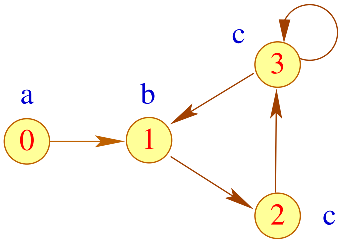
- Die Form der Ungleichungen dieser Ungleichungssysteme ist:

$$X \subseteq Y \qquad \text{bzw.} \qquad X \sqsupseteq D$$

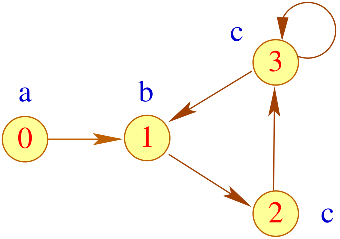
  für Variablen X, Y und $D \subseteq T \cup \{\epsilon\}$.
- Solche Ungleichungssysteme heißen reine Vereinigungs-Probleme
- Diese Probleme können mit linearem Aufwand gelöst werden

Beispiel:

$$\begin{array}{lll}
X_0 \supseteq \{a\} & & \\
X_1 \supseteq \{b\} & X_1 \supseteq X_0 & X_1 \supseteq X_3 \\
X_2 \supseteq \{c\} & X_2 \supseteq X_1 & \\
X_3 \supseteq \{c\} & X_3 \supseteq X_2 & X_3 \supseteq X_3
\end{array}$$



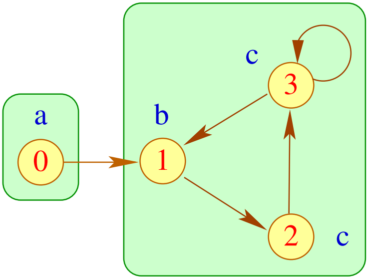
Schnelle Berechnung von Vorausschau-Mengen



Vorgehen:

- Konstruiere den Variablen-Abhängigkeitsgraph zum Ungleichungssystem: Inklusiuon $X_i \supseteq X_j$ wird zu Kanten $j \to i$, Inklusion $X_i \supseteq \{a\}$ wird zu Beschriftung von i mit a.

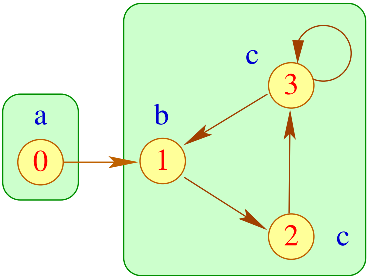
Schnelle Berechnung von Vorausschau-Mengen



Vorgehen:

- Konstruiere den Variablen-Abhängigkeitsgraph zum Ungleichungssystem: Inklusiuon $X_i \supseteq X_j$ wird zu Kanten $j \rightarrow i$, Inklusion $X_i \supseteq \{a\}$ wird zu Beschriftung von i mit a.
- Innerhalb einer starken Zusammenhangskomponente (SZK) haben alle Variablen den gleichen Wert

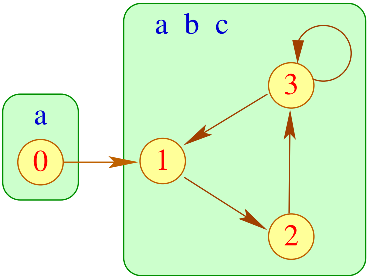
Schnelle Berechnung von Vorausschau-Mengen



Vorgehen:

- Konstruiere den Variablen-Abhängigkeitsgraph zum Ungleichungssystem: Inklusiuon $X_i \supseteq X_j$ wird zu Kanten $j \to i$, Inklusion $X_i \supseteq \{a\}$ wird zu Beschriftung von i mit a.
- Innerhalb einer starken Zusammenhangskomponente (SZK) haben alle Variablen den gleichen Wert
- Hat eine SZK keine eingehenden Kanten, erhält man ihren Wert, indem man alle Knotenbeschriftungen in der SZK vereinigt.

Schnelle Berechnung von Vorausschau-Mengen



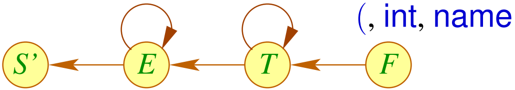
Vorgehen:

- Konstruiere den Variablen-Abhängigkeitsgraph zum Ungleichungssystem: Inklusiuon $X_i \supseteq X_j$ wird zu Kanten $j \to i$, Inklusion $X_i \supseteq \{a\}$ wird zu Beschriftung von i mit a.
- Innerhalb einer starken Zusammenhangskomponente (SZK) haben alle Variablen den gleichen Wert
- Hat eine SZK keine eingehenden Kanten, erhält man ihren Wert, indem man alle Knotenbeschriftungen in der SZK vereinigt.
- Gibt es eingehende Kanten, muss man zusätzlich die (bereits berechnenten) Werte an deren Startknoten hinzufügen

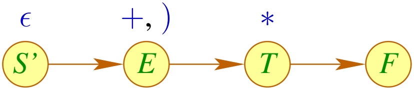
Schnelle Berechnung von Vorausschau-Mengen

... für unsere Beispiel-Grammatik:

First_1 :



Follow_1 :



Kapitel 8:
Bottom-up Analyse

Bottom-up Analyse

Achtung:

Viele Grammatiken sind nicht $LL(k)$!

Eine Grund dafür ist:

Definition

Die Grammatik G heißt links-rekursiv, falls

$$A \to^{+} A\,\beta \qquad \text{für ein} \quad A \in N \quad \text{und} \quad \beta \in (T \cup N)^{*}$$

Bottom-up Analyse

Achtung:

Viele Grammatiken sind nicht $LL(k)$!

Eine Grund dafür ist:

Definition

Die Grammatik G heißt links-rekursiv, falls

$$A \rightarrow^{+} A\,\beta \qquad \text{für ein} \quad A \in N \quad \text{und} \quad \beta \in (T \cup N)^*$$

Beispiel:

$$\begin{array}{lcllll} E & \rightarrow & E + T & \mid & T & \\ T & \rightarrow & T * F & \mid & F & \\ F & \rightarrow & (\,E\,) & \mid & \text{name} & \mid \ \text{int} \end{array}$$

... ist links-rekursiv

Bottom-up Analyse

Satz:

Ist die Grammatik G reduziert und links-rekursiv, dann ist G nicht $LL(k)$ für jedes k.

Bottom-up Analyse

Satz:

Ist die Grammatik G reduziert und links-rekursiv, dann ist G nicht $LL(k)$ für jedes k.

Beweis: Wir betrachten zur Vereinfachung nur den Fall, dass eine Produktion $A \to A\,\beta \;\in\; P$ existiert.

$$\begin{array}{lll} A \quad \text{erreichbar} & \Longrightarrow & S \to_L^* u\,A\,\gamma \to_L^* u\,A\,\beta^n\,\gamma \quad \text{für jedes} \quad n \geq 0\,. \\ A \quad \text{produktiv} & \Longrightarrow & \exists\, A \to \alpha \in P : \quad \alpha \neq A\,\beta\,. \end{array}$$

Bottom-up Analyse

Satz:

Ist die Grammatik G reduziert und links-rekursiv, dann ist G nicht $LL(k)$ für jedes k.

Beweis: Wir betrachten zur Vereinfachung nur den Fall, dass eine Produktion $A \to A\,\beta \;\in\; P$ existiert.

A	erreichbar	$\Longrightarrow$	$S \to_L^* u\,A\,\gamma \to_L^* u\,A\,\beta^n\,\gamma$ für jedes	$n \geq 0$.
A	produktiv	$\Longrightarrow$	$\exists A \to \alpha \in P \;:\; \alpha \neq A\,\beta$.	

Annahme: G ist $LL(k)$ Dann gilt für alle $n \geq 0$:

$$\text{First}_k(\alpha\,\beta^n\,\gamma) \;\cap\; \text{First}_k(A\,\beta\,\beta^n\,\gamma) \;=\; \emptyset$$

Weil $\text{First}_k(\alpha\,\beta^{n+1}\,\gamma) \;\subseteq\; \text{First}_k(A\,\beta^{n+1}\,\gamma)$

folgt: $\text{First}_k(\alpha\,\beta^n\,\gamma) \;\cap\; \text{First}_k(\alpha\,\beta^{n+1}\,\gamma) \;=\; \emptyset$

Bottom-up Analyse

Satz:

Ist die Grammatik G reduziert und links-rekursiv, dann ist G nicht $LL(k)$ für jedes k.

Beweis: Wir betrachten zur Vereinfachung nur den Fall, dass eine Produktion $A \to A\,\beta \;\in\; P$ existiert.

$$\begin{array}{lll} A \text{ erreichbar} & \Longrightarrow & S \to_L^* u\,A\,\gamma \to_L^* u\,A\,\beta^n\,\gamma \quad \text{für jedes} \quad n \geq 0\,. \\ A \text{ produktiv} & \Longrightarrow & \exists A \to \alpha \in P \;:\; \alpha \neq A\,\beta\,. \end{array}$$

Annahme: G ist $LL(k)$ Dann gilt für alle $n \geq 0$:

$$\begin{array}{llcll} & \text{First}_k(\alpha\,\beta^n\,\gamma) & \cap & \text{First}_k(A\,\beta\,\beta^n\,\gamma) & = \emptyset \\ \text{Weil} & \text{First}_k(\alpha\,\beta^{n+1}\,\gamma) & \subseteq & \text{First}_k(A\,\beta^{n+1}\,\gamma) & \\ \text{folgt:} & \text{First}_k(\alpha\,\beta^n\,\gamma) & \cap & \text{First}_k(\alpha\,\beta^{n+1}\,\gamma) & = \emptyset \end{array}$$

Fall 1: $\beta \to^* \epsilon$ — Widerspruch !!!

Fall 2: $\beta \to^* w \neq \epsilon$ $\Longrightarrow$

$\text{First}_k(\alpha\,\beta^k\,\gamma) \cap \text{First}_k(\alpha\,\beta^{k+1}\,\gamma) \neq \emptyset$

Bottom-up Analyse

Idee: Wir rekonstruieren reverse Rechtsableitungen!
Dazu versuchen wir, für den Shift-Reduce-Parser $M_G^{(1)}$ (Folie 121) die Reduktionsstellen zu identifizieren ...

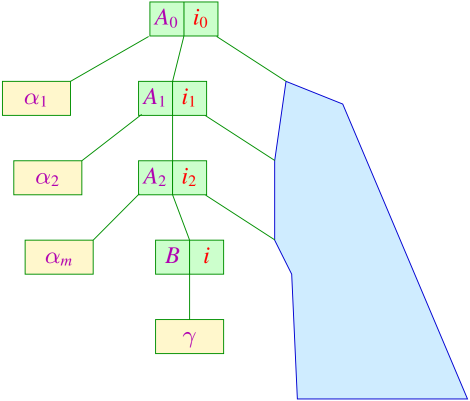
Betrachte eine Berechnung dieses Kellerautomaten:

$$(q_0\,\alpha\,\gamma,\ v) \vdash (q_0\,\alpha\,B,\ v) \vdash^* (q_0\,S,\ \epsilon)$$

$\alpha\,\gamma$ nennen wir zuverlässiges Präfix für das vollständige Item $[B \to \gamma \bullet]$.

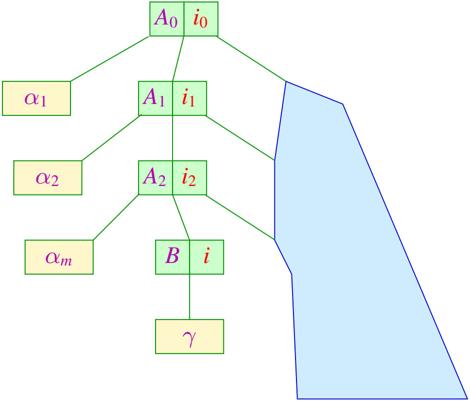
Dann ist $\alpha\,\gamma$ zuverlässig für $[B \to \gamma \bullet]$ genau dann, wenn $S \to_R^* \alpha\,B\,v$

Bottom-up Analyse



... wobei $\alpha = \alpha_1 \ldots \alpha_m$

Bottom-up Analyse

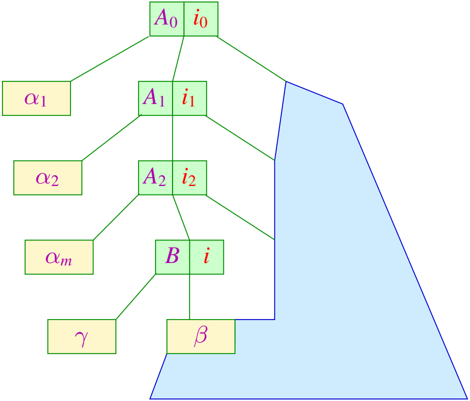


... wobei $\alpha = \alpha_1 \ldots \alpha_m$

Umgekehrt können wir zu jedem möglichen Wort α' die Menge aller möglicherweise später passenden Regeln ermitteln ...

Bottom-up Analyse

Das Item $[B \to \gamma \bullet \beta]$ heißt gültig für α' gdw. $S \to_R^* \alpha\, B\, v$ mit $\alpha' = \alpha\,\gamma$:



... wobei $\alpha = \alpha_1 \ \ldots \ \alpha_m$

Charakteristischer Automat

Beobachtung:

Die Menge der zuverlässigen Präfixe aus $(N \cup T)^*$ für (vollständige) Items kann mithilfe eines endlichen Automaten berechnet werden:

Zustände: Items

Anfangszustand: $[S' \to \bullet\, S]$

Endzustände: $\{[B \to \gamma\bullet] \mid B \to \gamma \in P\}$

Übergänge:

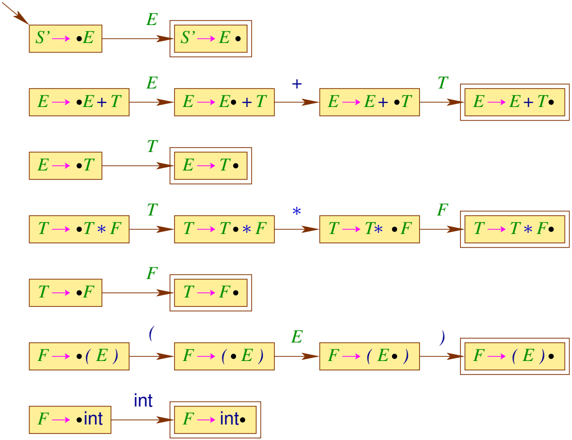
$$\begin{array}{lll} (1) & ([A \to \alpha \bullet X\,\beta], X, [A \to \alpha\, X \bullet \beta]), & X \in (N \cup T), A \to \alpha\, X\, \beta \in P; \\ (2) & ([A \to \alpha \bullet B\,\beta], \epsilon, [B \to\ \bullet \gamma]), & A \to \alpha\, B\, \beta\ ,\ \ B \to \gamma \in P; \end{array}$$

Den Automaten $c(G)$ nennen wir charakteristischen Automaten für G.

Charakteristischer Automat

im Beispiel:

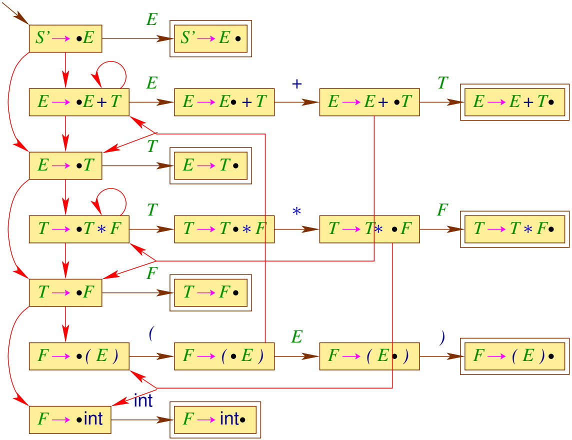
$$
\begin{array}{lcll}
E & \rightarrow & E + T & \mid \; T \\
T & \rightarrow & T * F & \mid \; F \\
F & \rightarrow & (\, E \,) & \mid \; \mathsf{int}
\end{array}
$$



Charakteristischer Automat

im Beispiel:

$$
\begin{array}{lcll}
E & \to & E+T & \mid \; T \\
T & \to & T*F & \mid \; F \\
F & \to & (\,E\,) & \mid \; \text{int}
\end{array}
$$

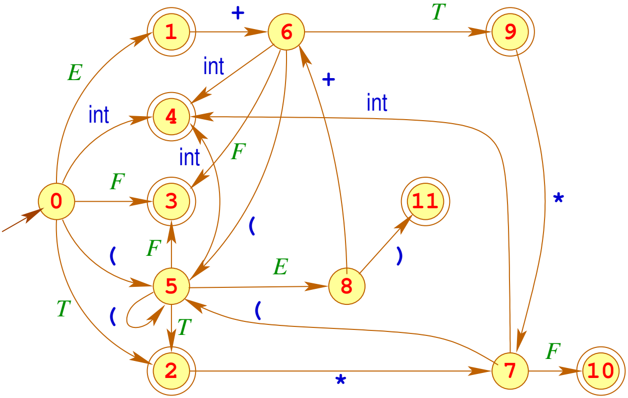


Kanonischer LR(0)-Automat

Den kanonischen $LR(0)$-Automaten $LR(G)$ erhalten wir aus $c(G)$, indem wir:

1. nach jedem lesenden Übergang beliebig viele ϵ-Übergänge einschieben (Konstruktion 1 zur Beseitigung von ϵ-Übergängen, Folie 32)
2. die Teilmengenkonstruktion anwenden.

... im Beispiel:



Kanonischer LR(0)-Automat

Dazu konstruieren wir:

$$
\begin{array}{lll}
q_0 & = & \{[S' \to \bullet\, E], \\
 & & \;[E \to \bullet\, E + T], \\
 & & \;[E \to \bullet\, T], \\
 & & \;[T \to \bullet\, T * F]\} \\
 & & \;[T \to \bullet\, F], \\
 & & \;[F \to \bullet\, (\, E\,)\,], \\
 & & \;[F \to \bullet\, \mathsf{int}]\}
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{lllll}
q_1 & = & \delta(q_0, E) & = & \{[S' \to E\bullet], \\
 & & & & \;[E \to E \bullet + T]\} \\
q_2 & = & \delta(q_0, T) & = & \{[E \to T\bullet], \\
 & & & & \;[T \to T \bullet * F]\} \\
q_3 & = & \delta(q_0, F) & = & \{[T \to F\bullet]\} \\
q_4 & = & \delta(q_0, \mathsf{int}) & = & \{[F \to \mathsf{int}\bullet]\}
\end{array}
$$

Kanonischer LR(0)-Automat

$$q_5 = \delta(q_0, \,(\,) = \{[F \to (\, \bullet E\,)], [E \to \bullet E + T], [E \to \bullet T], [T \to \bullet T * F], [T \to \bullet F], [F \to \bullet (\,E\,)], [F \to \bullet \mathsf{int}]\}$$

$$q_6 = \delta(q_1, +) = \{[E \to E + \bullet T], [T \to \bullet T * F], [T \to \bullet F], [F \to \bullet (\,E\,)], [F \to \bullet \mathsf{int}]\}$$

$$q_7 = \delta(q_2, *) = \{[T \to T * \bullet F], [F \to \bullet (\,E\,)], [F \to \bullet \mathsf{int}]\}$$

$$q_8 = \delta(q_5, E) = \{[F \to (\,E \bullet\,)]\} [E \to E \bullet + T]\}$$

$$q_9 = \delta(q_6, T) = \{[E \to E + T \bullet], [T \to T \bullet * F]\}$$

$$q_{10} = \delta(q_7, F) = \{[T \to T * F \bullet]\}$$

$$q_{11} = \delta(q_8, \,)\,) = \{[F \to (\,E\,) \bullet]\}$$

Kanonischer LR(0)-Automat

Der kanonische $LR(0)$-Automat kann auch direkt aus der Grammatik konstruiert werden.

Man benötigt die Hilfsfunktion δ_ϵ^* (q ist eine Menge von items):

$$\delta_\epsilon^*(q) = q \cup \{[B \to \bullet\,\gamma] \mid \exists\, [A \to \alpha \bullet B'\,\beta'] \in q, \beta \in (N \cup T)^* : B' \to^* B\,\beta\}$$

Dann definiert man:

Zustände: Mengen von Items

Anfangszustand $\delta_\epsilon^*(\{[S' \to \bullet\, S]\})$

Endzustände: $\{q \mid \exists\, A \to \alpha \in P : [A \to \alpha\,\bullet] \in q\}$

Übergänge: $\delta(q, X) = \delta_\epsilon^*(\{[A \to \alpha\, X \bullet \beta] \mid [A \to \alpha \bullet X\,\beta] \in q\})$

Lemma

Gelte $\delta(q_0, \beta) = q$ mit $\beta \in (N \cup T)^*$ im kanonischen $LR(0)$-Automaten (q_0 ist der Anfangszustand).

Dann gilt $[A \to \gamma\,\bullet] \in q$ genau dann wenn es eine Zerlegung $\beta = \alpha\gamma$ und eine Rechtsableitung $S \to_R^* \alpha\, A\, v$ mit $v \in T^*$ gibt.

LR(0)-Parser

Idee zu einem Parser:

- Der Parser verwaltet ein zuverlässiges Präfix $\alpha = X_1 \ldots X_m$ auf dem Keller und benutzt $LR(G)$, um Reduktionsstellen zu entdecken.
- Er kann mit einer Regel $A \to \gamma$ reduzieren, falls $[A \to \gamma \bullet]$ für α gültig ist.
- Damit der Automat nicht immer wieder neu über den Kellerinhalt laufen muss, kellern wir anstelle der X_i jeweils die Zustände des Automaten $LR(G)$!

Achtung:

Dieser Parser ist nur dann deterministisch, wenn jeder Endzustand des kanonischen $LR(0)$-Automaten keine sogenannten Konflikte enthält.

LR(0)-Parser

Die Konstruktion des $LR(0)$-Parsers:

Sei $LR(G) = (Q, T, \delta, q_0, F)$.

Zustände: $Q \cup \{f\}$ (f ist neuer Zustand)

Anfangszustand: q_0

Endzustand: f

Übergänge:

Shift:	$(p, a, p\,q)$	falls	$q = \delta(p, a) \neq \emptyset$
Reduce:	$(p\,q_1 \dots q_m, \epsilon, p\,q)$	falls	$[A \to X_1 \dots X_m \bullet] \in q_m$, $q = \delta(p, A)$
Finish:	$(q_0\,p, \epsilon, f)$	falls	$[S' \to S\bullet] \in p$

LR(0)-Parser

Zur Korrektheit:

Man zeigt:

Die akzeptierenden Berechnungen des $LR(0)$-Parsers stehen in eins-zu-eins Beziehung zu denen des Shift-Reduce-Parsers $M_G^{(1)}$.

Wir folgern:

$\Longrightarrow$ Die akzeptierte Sprache ist genau $\mathcal{L}(G)$

$\Longrightarrow$ Die Folge der Reduktionen einer akzeptierenden Berechnung für ein Wort $w \in T$ liefert eine reverse Rechts-Ableitung von G für w

LR(0)-Parser

Achtung:

Leider ist der $LR(0)$-Parser im allgemeinen nicht-deterministisch

Wir identifizieren zwei Gründe:

Reduce-Reduce-Konflikt:

$$[A \to \gamma \bullet]\,,\ \ [A' \to \gamma' \bullet] \ \ \in \ \ q \quad \text{mit} \quad A \neq A' \vee \gamma \neq \gamma'$$

Shift-Reduce-Konflikt:

$$[A \to \gamma \bullet]\,,\ \ [A' \to \alpha \bullet a\,\beta] \ \ \in \ \ q \quad \text{mit} \quad a \in T$$

für einen Zustand $q \in Q$.

Solche Zustände q nennen wir ungeeignet.

LR(0)-Parser

... im Beispiel:

$$
\begin{array}{lcl}
q_1 & = & \{[S' \to E\,\bullet], \\
 & & \;[E \to E\,\bullet\,+T]\}
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{lcl@{\qquad}lcl}
q_2 & = & \{[E \to T\,\bullet], & q_9 & = & \{[E \to E+T\,\bullet], \\
 & & \;[T \to T\,\bullet * F]\} & & & \;[T \to T\,\bullet * F]\} \\
q_3 & = & \{[T \to F\,\bullet]\} & q_{10} & = & \{[T \to T * F\,\bullet]\} \\
q_4 & = & \{[F \to \textsf{int}\,\bullet]\} & q_{11} & = & \{[F \to (\,E\,)\,\bullet]\}
\end{array}
$$

Die Zustände q_1, q_2, q_9 enthalten einen Shift-Reduce-Konflikt (ein Reduce-Reduce-Konflikt liegt nicht vor).

Also ist der $LR(0)$-Parser hier nicht deterministisch!

LR(0)-Parser

Definition:

Die reduzierte kontextfreie Grammatik G heißt $LR(0)$-Grammatik, falls aus:

$$\left.\begin{array}{llll} S & \rightarrow_R^* & \alpha\, A\, w & \rightarrow_R \; \alpha\, \beta\, w \\ S & \rightarrow_R^* & \alpha'\, A'\, w' & \rightarrow_R \; \alpha\, \beta\, x \end{array}\right\} \text{ folgt: } \quad \alpha = \alpha' \;\wedge\; A = A' \;\wedge\; w' = x$$

In der Tat gilt:

Satz:

Die reduzierte Grammatik G ist genau dann $LR(0)$ wenn der kanonische $LR(0)$-Automat $LR(G)$ keine ungeeigneten Zustände enthält.

Beweis:

Enthalte $LR(G)$ einen ungeeigneten Zustand q.

Fall 1: $[A \to \gamma\bullet]\,,\ [A' \to \gamma'\bullet]\ \in\ q$ mit $A \neq A'$ oder $\gamma \neq \gamma'$

Dann gibt es ein zuverlässiges Präfix $\alpha\,\gamma = \alpha'\,\gamma'$ mit

$$S \to_R^* \alpha\, A\, w \to_R \alpha\,\gamma\, w \quad \wedge \quad S \to_R^* \alpha'\, A'\, x \to_R \alpha'\,\gamma'\, x$$

Wenn $A \neq A'$, dann ist G nicht $LR(0)$.

Wenn $\gamma \neq \gamma'$, dann $\alpha \neq \alpha'$ (wegen $\alpha\,\gamma\ =\ \alpha'\,\gamma'$) und wieder ist G nicht $LR(0)$.

Fall 2: $[A \to \gamma\bullet]\,,\ [A' \to \beta \bullet a\, \beta']\ \in\ q$

Dann gibt es ein zuverlässiges Präfix $\alpha\,\gamma = \alpha'\,\beta$ mit

$$S \to_R^* \alpha\, A\, w \to_R \alpha\,\gamma\, w \quad \wedge \quad S \to_R^* \alpha'\, A'\, x \to_R \alpha'\,\beta\, a\, \beta'\, x$$

Ist $\beta'\ \in\ T^*$, dann ist G nicht $LR(0)$ (weil $x \neq a\,\beta'\, x \in T^*$).

Andernfalls $\beta' \to_R^* v_1\, X\, v_2 \to v_1\, u\, v_2$. Damit erhalten wir:

$$S \to_R^* \alpha'\,\beta\, a\, v_1\, X\, v_2\, x \to \alpha'\,\beta\, a\, v_1\, u\, v_2\, x$$

Wieder ist G nicht $LR(0)$ (da $v_2\, x \neq a\, v_1\, u\, v_2\, x$).

Enthalte $LR(G)$ keine ungeeigneten Zustände. Betrachte:

$$S \rightarrow_R^* \alpha\, A\, w \rightarrow_R \alpha\, \gamma\, w \qquad\qquad S \rightarrow_R^* \alpha'\, A'\, w' \rightarrow_R \alpha\, \gamma\, x$$

Sei $\delta(q_0, \alpha\,\gamma) = q$. Insbesondere ist $[A \rightarrow \gamma\bullet] \in q$.

Annahme: $(\alpha, A, w') \neq (\alpha', A', x)$. Wir leiten einen Widerspruch ab.

Fall 1: $w' = x$, d.h. $S \rightarrow_R^* \alpha'\, A'\, x \rightarrow_R \alpha\, \gamma\, x$.

Falls $\alpha' = \alpha$ muss $A \neq A'$ gelten.

Ausserdem gilt $[A' \rightarrow \gamma\bullet] \in q$ und damit ist q ungeeignet.

Falls $\alpha' \neq \alpha$ gibt es eine Produktion $A' \rightarrow \gamma' \neq \gamma$ mit $\alpha'\gamma' = \alpha\gamma$ und $[A' \rightarrow \gamma'\bullet] \in q$ und q ist wieder ungeeignet.

Fall 2: $w' \neq x$. Weitere Fallunterscheidungen . . .

LR(k)-Grammatik

Idee: Benutze k-Vorausschau, um Konflikte zu lösen.

Definition:

Die reduzierte kontextfreie Grammatik G heißt $LR(k)$-Grammatik, falls für $\text{First}_k(w) = \text{First}_k(x)$ aus:

$$\left.\begin{array}{lllll} S & \to_R^* & \alpha\, A\, w & \to_R & \alpha\, \beta\, w \\ S & \to_R^* & \alpha'\, A'\, w' & \to_R & \alpha\, \beta\, x \end{array}\right\} \text{ folgt: } \quad \alpha = \alpha' \;\wedge\; A = A' \;\wedge\; w' = x$$

LR(k)-Grammatik

im Beispiel:

(1) $S \to A \mid B \qquad A \to a\,A\,b \mid 0 \qquad B \to a\,B\,b\,b \mid 1$

... ist nicht $LL(k)$ für jedes k — aber $LR(0)$:

Sei $S \to_R^* \alpha\, X\, w \to \alpha\, \beta\, w$. Dann ist $\alpha\, \underline{\beta}$ von einer der Formen:

$$\underline{A}\,,\ \underline{B}\,,\ a^n\, \underline{a\,A\,b}\,,\ a^n\, \underline{a\,B\,b\,b}\,,\ a^n\, \underline{0}\,,\ a^n\, \underline{1} \qquad (n \geq 0)$$

LR(k)-Grammatik

im Beispiel:

(1) $S \to A \mid B \qquad A \to a\,A\,b \mid 0 \qquad B \to a\,B\,b\,b \mid 1$

... ist nicht $LL(k)$ für jedes k — aber $LR(0)$:

Sei $S \to_R^* \alpha\, X\, w \to \alpha\, \beta\, w$. Dann ist $\alpha\, \underline{\beta}$ von einer der Formen:

$$\underline{A}\ ,\ \underline{B}\ ,\ a^n\,\underline{a\,A\,b}\ ,\ a^n\,\underline{a\,B\,b\,b}\ ,\ a^n\,\underline{0}\ ,\ a^n\,\underline{1} \qquad (n \geq 0)$$

(2) $S \to a\,A\,c \qquad A \to A\,b\,b \mid b$

... ist ebenfalls $LR(0)$:

Sei $S \to_R^* \alpha\, X\, w \to \alpha\, \beta\, w$. Dann ist $\alpha\, \underline{\beta}$ von einer der Formen:

$$a\,\underline{b}\ ,\ a\,\underline{A\,b\,b}\ ,\ \underline{a\,A\,c}$$

LR(k)-Grammatik

im Beispiel:

(3) $S \to a\,A\,c \qquad A \to b\,b\,A \;\mid\; b$ ... ist nicht $LR(0)$, aber $LR(1)$:

Für $S \to_R^* \alpha\,X\,w \to \alpha\,\beta\,w$ mit $\{y\} = \text{First}_k(w)$ ist $\alpha\,\underline{\beta}\,y$ von einer der Formen:

$$a\,b^{2n}\,\underline{b}\,c\;,\;\; a\,b^{2n}\,\underline{b\,b\,A}\,c\;,\;\; \underline{a\,A\,c}$$

LR(k)-Grammatik

im Beispiel:

(3) $S \to a\,A\,c \qquad A \to b\,b\,A \mid b$ ... ist nicht $LR(0)$, aber $LR(1)$:

Für $S \to_R^* \alpha\,X\,w \to \alpha\,\beta\,w$ mit $\{y\} = \text{First}_k(w)$ ist $\alpha\,\underline{\beta}\,y$ von einer der Formen:

$$a\,b^{2n}\,\underline{b}\,c\;,\;a\,b^{2n}\,\underline{b\,b\,A}\,c\;,\;\underline{a\,A\,c}$$

(4) $S \to a\,A\,c \qquad A \to b\,A\,b \mid b$ ... ist nicht $LR(k)$ für jedes $k \geq 0$:

Betrachte einfach die Rechtsableitungen:

$$S \to_R^* a\,b^n\,A\,b^n\,c \to a\,b^n\,\underline{b}\,b^n\,c$$

LR(k)-Items

Sei $k > 0$.

Idee: Wir statten Items mit k-Vorausschau aus

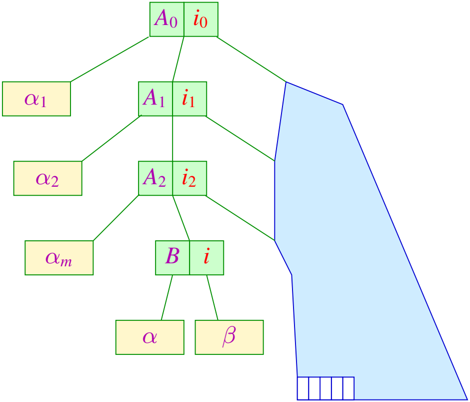
Ein $LR(k)$-Item ist dann ein Paar:

$$[B \to \alpha \bullet \beta,\, x]\;, \qquad x \in \text{Follow}_k(B)$$

Dieses Item ist gültig für $\gamma\,\alpha$ falls:

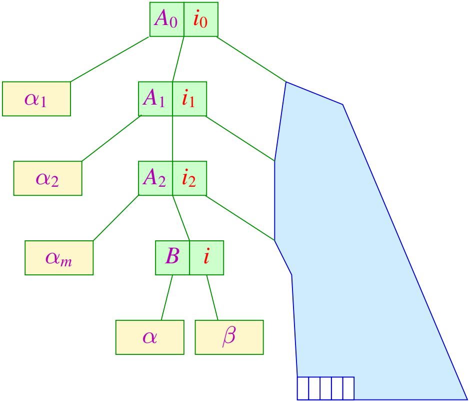
$$S \to_R^* \gamma\, B\, w \qquad \text{mit} \qquad \{x\} = \text{First}_k(w)$$

LR(k)-Items



... wobei $\alpha_1 \dots \alpha_m = \gamma$

LR(k)-Items



... wobei $\alpha_1 \ldots \alpha_m = \gamma$

Die Menge der gültigen $LR(k)$-Items für zuverlässige Präfixe berechnen wir wieder mithilfe eines endlichen Automaten

Der charakteristische LR(k)-Automat

Der Automat $c(G,k)$:

Zustände: $LR(k)$-Items

Anfangszustand: $[S' \to \bullet S,\ \epsilon]$

Endzustände: $\{[B \to \gamma\bullet,\ x] \mid B \to \gamma \in P, x \in \text{Follow}_k(B)\}$

Übergänge:

(1) $([A \to \alpha \bullet X\,\beta,\ x], X, [A \to \alpha\, X \bullet \beta,\ x]), \quad X \in (N \cup T)$

(2) $([A \to \alpha \bullet B\,\beta,\ x], \epsilon, [B \to \bullet\,\gamma,\ x']),$
$A \to \alpha\, B\, \beta\ ,\ \ B \to \gamma \in P, x' \in \text{First}_k(\beta) \odot \{x\};$

Der charakteristische LR(k)-Automat

Der Automat $c(G, k)$:

Zustände: $LR(k)$-Items

Anfangszustand: $[S' \to \bullet S,\ \epsilon]$

Endzustände: $\{[B \to \gamma\bullet,\ x] \mid B \to \gamma\ \in\ P, x\ \in\ \text{Follow}_k(B)\}$

Übergänge:

$(1)\quad ([A \to \alpha \bullet X\,\beta,\ x], X, [A \to \alpha\, X \bullet \beta,\ x]), \quad X\ \in\ (N \cup T)$

$(2)\quad ([A \to \alpha \bullet B\,\beta,\ x], \epsilon, [B \to\ \bullet \gamma,\ x']),$

$\qquad A \to \alpha\, B\, \beta\ ,\quad B \to \gamma\ \in\ P, x'\ \in\ \text{First}_k(\beta) \odot \{x\};$

Dieser Automat arbeitet wie $c(G)$ — verwaltet aber zusätzlich ein k-Präfix aus dem Follow_k der linken Seiten.

Der kanonische LR(k)-Automat

Den kanonischen $LR(k)$-Automaten $LR(G, k)$ erhält man aus $c(G, k)$, indem man nach jedem Übergang beliebig viele ϵ liest und dann den Automaten deterministisch macht ...

Der kanonische LR(k)-Automat

Den kanonischen $LR(k)$-Automaten $LR(G, k)$ erhält man aus $c(G, k)$, indem man nach jedem Übergang beliebig viele ϵ liest und dann den Automaten deterministisch macht ...

Man kann ihn aber auch direkt aus der Grammatik konstruieren

Wie bei $LR(0)$ benötigt man eine Hilfsfunktion:

$$\begin{aligned}\delta^*_\epsilon(q) = q \cup \{[B \to \bullet\,\gamma,\, x] \mid \quad & \exists\, [A \to \alpha \bullet B'\, \beta',\, x'] \in q\,, \\ & \beta \in (N \cup T)^* : \quad B' \to^* B\, \beta\} \wedge \\ & x \in \mathsf{First}_k(\beta\, \beta') \odot \{x'\}\}\end{aligned}$$

Der kanonische LR(k)-Automat

Den kanonischen $LR(k)$-Automaten $LR(G, k)$ erhält man aus $c(G, k)$, indem man nach jedem Übergang beliebig viele ϵ liest und dann den Automaten deterministisch macht ...
Man kann ihn aber auch direkt aus der Grammatik konstruieren
Wie bei $LR(0)$ benötigt man eine Hilfsfunktion:

$$\begin{array}{rl} \delta^*_\epsilon(q) = q \cup \{[B \to \bullet\,\gamma,\ x] \mid & \exists\, [A \to \alpha\ \bullet B'\,\beta',\ x'] \in q\,, \\ & \beta \in (N \cup T)^* : \quad B' \to^* B\,\beta\} \ \wedge \\ & x \in \mathsf{First}_k(\beta\,\beta') \odot \{x'\}\} \end{array}$$

Dann definiert man:

Zustände: Mengen von $LR(k)$-Items;

Anfangszustand: $\delta^*_\epsilon\ \{[S' \to\ \bullet S,\ \epsilon]\}$

Endzustände: $\{q \mid \exists A \to \alpha \in P : \ [A \to \alpha\,\bullet,\ x] \in q\}$

Übergänge: $\delta(q, X) = \delta^*_\epsilon\ \{[A \to \alpha\,X \bullet \beta,\ x] \mid [A \to \alpha \bullet X\,\beta,\ x] \in q\}$

Der kanonische LR(k)-Automat

im Beispiel:

$$\begin{array}{lllll}
q_0 & = & & & \{[S' \to \bullet\, E\ ], \\
 & & & & [E \to \bullet\, E + T\ ], \\
 & & & & [E \to \bullet\, T\ ], \\
 & & & & [T \to \bullet\, T * F\ ], \\
 & & & & [T \to \bullet\, F\ ], \\
 & & & & [F \to \bullet\, (\, E\,)\ ], \\
 & & & & [F \to \bullet\, \text{int}\ ]\} \\
q_1 & = & \delta(q_0, E) & = & \{[S' \to E\, \bullet\ ], \\
 & & & & [E \to E \bullet + T\ ]\} \\
q_2 & = & \delta(q_0, T) & = & \{[E \to T\, \bullet\ ], \\
 & & & & [T \to T \bullet * F\ ]\}
\end{array}$$

$$\begin{array}{lllll}
q_3 & = & \delta(q_0, F) & = & \{[T \to F\, \bullet\ ]\} \\
q_4 & = & \delta(q_0, \text{int}) & & \{[F \to \text{int}\, \bullet\ ]\} \\
q_5 & = & \delta(q_0, (\,) & = & \{[F \to (\, \bullet\, E\,)\ ], \\
 & & & & [E \to \bullet\, E + T\ ], \\
 & & & & [E \to \bullet\, T\ ], \\
 & & & & [T \to \bullet\, T * F\ ] \\
 & & & & [T \to \bullet\, F\ ], \\
 & & & & [F \to \bullet\, (\, E\,)\ ] \\
 & & & & [F \to \bullet\, \text{int}\ ]\}
\end{array}$$

Der kanonische LR(k)-Automat

im Beispiel:

$$
\begin{array}{lllll}
q_0 & = & & & \{[S' \to \bullet E,\ \{\epsilon\}], \\
& & & & [E \to \bullet E + T,\ \{\epsilon, +\}], \\
& & & & [E \to \bullet T,\ \{\epsilon, +\}], \\
& & & & [T \to \bullet T * F,\ \{\epsilon, +, *\}], \\
& & & & [T \to \bullet F,\ \{\epsilon, +, *\}], \\
& & & & [F \to \bullet (\, E\,),\ \{\epsilon, +, *\}], \\
& & & & [F \to \bullet \,\mathsf{int},\ \{\epsilon, +, *\}]\} \\
q_1 & = & \delta(q_0, E) & = & \{[S' \to E \bullet \quad], \\
& & & & [E \to E \bullet + T \quad]\} \\
q_2 & = & \delta(q_0, T) & = & \{[E \to T \bullet \quad], \\
& & & & [T \to T \bullet * F \quad]\}
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{lllll}
q_3 & = & \delta(q_0, F) & = & \{[T \to F \bullet \quad]\} \\
q_4 & = & \delta(q_0, \mathsf{int}) & & \{[F \to \mathsf{int} \bullet \quad]\} \\
q_5 & = & \delta(q_0, (\,) & = & \{[F \to (\, \bullet E\,) \quad], \\
& & & & [E \to \bullet E + T \quad], \\
& & & & [E \to \bullet T \quad], \\
& & & & [T \to \bullet T * F \quad] \\
& & & & [T \to \bullet F \quad], \\
& & & & [F \to \bullet (\, E\,) \quad] \\
& & & & [F \to \bullet \,\mathsf{int} \quad]\}
\end{array}
$$

Der kanonische LR(k)-Automat

im Beispiel:

$$
\begin{array}{lllll}
q_0 & = & & & \{[S' \to \bullet\, E,\ \{\epsilon\}], \\
 & & & & [E \to \bullet\, E + T,\ \{\epsilon, +\}], \\
 & & & & [E \to \bullet\, T,\ \{\epsilon, +\}], \\
 & & & & [T \to \bullet\, T * F,\ \{\epsilon, +, *\}], \\
 & & & & [T \to \bullet\, F,\ \{\epsilon, +, *\}], \\
 & & & & [F \to \bullet\, (\, E\,),\ \{\epsilon, +, *\}], \\
 & & & & [F \to \bullet\, \mathsf{int},\ \{\epsilon, +, *\}]\} \\
q_1 & = & \delta(q_0, E) & = & \{[S' \to E\, \bullet\,,\ \{\epsilon\}], \\
 & & & & [E \to E \bullet + T,\ \{\epsilon, +\}]\} \\
q_2 & = & \delta(q_0, T) & = & \{[E \to T\, \bullet\,,\ \{\epsilon, +\}], \\
 & & & & [T \to T \bullet * F,\ \{\epsilon, +, *\}]\}
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{lllll}
q_3 & = & \delta(q_0, F) & = & \{[T \to F\, \bullet\,,\ \{\epsilon, +, *\}]\} \\
q_4 & = & \delta(q_0, \mathsf{int}) & & \{[F \to \mathsf{int}\, \bullet\,,\ \{\epsilon, +, *\}]\} \\
q_5 & = & \delta(q_0, (\,) & = & \{[F \to (\, \bullet\, E\,) \quad], \\
 & & & & [E \to \bullet\, E + T \quad], \\
 & & & & [E \to \bullet\, T \quad], \\
 & & & & [T \to \bullet\, T * F \quad] \\
 & & & & [T \to \bullet\, F \quad], \\
 & & & & [F \to \bullet\, (\, E\,) \quad] \\
 & & & & [F \to \bullet\, \mathsf{int} \quad]\}
\end{array}
$$

Der kanonische LR(k)-Automat

im Beispiel:

$$
\begin{array}{lllll}
q_0 & = & & & \{[S' \to \bullet\, E,\ \{\epsilon\}], \\
 & & & & \ [E \to \bullet\, E + T,\ \{\epsilon, +\}], \\
 & & & & \ [E \to \bullet\, T,\ \{\epsilon, +\}], \\
 & & & & \ [T \to \bullet\, T * F,\ \{\epsilon, +, *\}], \\
 & & & & \ [T \to \bullet\, F,\ \{\epsilon, +, *\}], \\
 & & & & \ [F \to \bullet\, (\, E\,),\ \{\epsilon, +, *\}], \\
 & & & & \ [F \to \bullet\, \mathsf{int},\ \{\epsilon, +, *\}]\} \\
q_1 & = & \delta(q_0, E) & = & \{[S' \to E \bullet,\ \{\epsilon\}], \\
 & & & & \ [E \to E \bullet + T,\ \{\epsilon, +\}]\} \\
q_2 & = & \delta(q_0, T) & = & \{[E \to T \bullet,\ \{\epsilon, +\}], \\
 & & & & \ [T \to T \bullet * F,\ \{\epsilon, +, *\}]\}
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{lllll}
q_3 & = & \delta(q_0, F) & = & \{[T \to F \bullet,\ \{\epsilon, +, *\}]\} \\
q_4 & = & \delta(q_0, \mathsf{int}) & & \{[F \to \mathsf{int} \bullet,\ \{\epsilon, +, *\}]\} \\
q_5 & = & \delta(q_0, (\,) & = & \{[F \to (\ \bullet\, E\,),\ \{\epsilon, +, *\}], \\
 & & & & \ [E \to \bullet\, E + T,\ \{\,)\,, +\}], \\
 & & & & \ [E \to \bullet\, T,\ \{\,)\,, +\}], \\
 & & & & \ [T \to \bullet\, T * F,\ \{\,)\,, +, *\}] \\
 & & & & \ [T \to \bullet\, F,\ \{\,)\,, +, *\}], \\
 & & & & \ [F \to \bullet\, (\, E\,),\ \{\,)\,, +, *\}] \\
 & & & & \ [F \to \bullet\, \mathsf{int},\ \{\,)\,, +, *\}]\}
\end{array}
$$

Der kanonische LR(k)-Automat

im Beispiel:

$$\begin{array}{lllll}
q'_5 & = & \delta(q_5, () & = & \{[F \to (\bullet E) \quad], \\
 & & & & \ [E \to \bullet E + T \quad], \\
 & & & & \ [E \to \bullet T \quad], \\
 & & & & \ [T \to \bullet T * F \quad], \\
 & & & & \ [T \to \bullet F \quad], \\
 & & & & \ [F \to \bullet (E) \quad], \\
 & & & & \ [F \to \bullet \text{int} \quad]\} \\
 & & & & \\
q_6 & = & \delta(q_1, +) & = & \{[E \to E + \bullet T \quad], \\
 & & & & \ [T \to \bullet T * F \quad], \\
 & & & & \ [T \to \bullet F \quad], \\
 & & & & \ [F \to \bullet (E) \quad], \\
 & & & & \ [F \to \bullet \text{int} \quad]\}
\end{array}$$

$$\begin{array}{lllll}
q_7 & = & \delta(q_2, *) & = & \{[T \to T * \bullet F \quad], \\
 & & & & \ [F \to \bullet (E) \quad], \\
 & & & & \ [F \to \bullet \text{int} \quad]\} \\
 & & & & \\
q_8 & = & \delta(q_5, E) & = & \{[F \to (E \bullet) \quad]\} \\
 & & & & \ [E \to E \bullet + T \quad]\} \\
 & & & & \\
q_9 & = & \delta(q_6, T) & = & \{[E \to E + T \bullet \quad], \\
 & & & & \ [T \to T \bullet * F \quad]\} \\
 & & & & \\
q_{10} & = & \delta(q_7, F) & = & \{[T \to T * F \bullet \quad]\} \\
 & & & & \\
q_{11} & = & \delta(q_8,)) & = & \{[F \to (E) \bullet \quad]\}
\end{array}$$

Der kanonische LR(k)-Automat

im Beispiel:

$$
\begin{array}{lllll}
q'_5 & = & \delta(q_5, (\,) & = & \{[F \to (\bullet E)\,,\ \{\,)\,,+,*\}], \\
 & & & & \;[E \to \bullet E + T,\ \{\,)\,,+\}], \\
 & & & & \;[E \to \bullet T,\ \{\,)\,,+\}], \\
 & & & & \;[T \to \bullet T * F,\ \{\,)\,,+,*\}], \\
 & & & & \;[T \to \bullet F,\ \{\,)\,,+,*\}], \\
 & & & & \;[F \to \bullet (E)\,,\ \{\,)\,,+,*\}], \\
 & & & & \;[F \to \bullet \mathsf{int},\ \{\,)\,,+,*\}]\} \\
q_6 & = & \delta(q_1, +) & = & \{[E \to E + \bullet T], \\
 & & & & \;[T \to \bullet T * F], \\
 & & & & \;[T \to \bullet F], \\
 & & & & \;[F \to \bullet (E)], \\
 & & & & \;[F \to \bullet \mathsf{int}]\}
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{lllll}
q_7 & = & \delta(q_2, *) & = & \{[T \to T * \bullet F], \\
 & & & & \;[F \to \bullet (E)], \\
 & & & & \;[F \to \bullet \mathsf{int}]\} \\
q_8 & = & \delta(q_5, E) & = & \{[F \to (E \bullet)]\} \\
 & & & & \;[E \to E \bullet + T]\} \\
q_9 & = & \delta(q_6, T) & = & \{[E \to E + T \bullet], \\
 & & & & \;[T \to T \bullet * F]\} \\
q_{10} & = & \delta(q_7, F) & = & \{[T \to T * F \bullet]\} \\
q_{11} & = & \delta(q_8,)\,) & = & \{[F \to (E) \bullet]\}
\end{array}
$$

Der kanonische LR(k)-Automat

im Beispiel:

$$
\begin{array}{lllll}
q_5' & = & \delta(q_5,\, (\,) & = & \{[F \to (\ \bullet E\,),\ \{\,)\,,+,*\}], \\
 & & & & \ [E \to \ \bullet E+T,\ \{\,)\,,+\}], \\
 & & & & \ [E \to \ \bullet T,\ \{\,)\,,+\}], \\
 & & & & \ [T \to \ \bullet T*F,\ \{\,)\,,+,*\}], \\
 & & & & \ [T \to \ \bullet F,\ \{\,)\,,+,*\}], \\
 & & & & \ [F \to \ \bullet (\,E\,),\ \{\,)\,,+,*\}], \\
 & & & & \ [F \to \ \bullet \mathsf{int},\ \{\,)\,,+,*\}]\} \\
 & & & & \\
q_6 & = & \delta(q_1, +) & = & \{[E \to E+\bullet T,\ \{\epsilon,+\}], \\
 & & & & \ [T \to \ \bullet T*F,\ \{\epsilon,+,*\}], \\
 & & & & \ [T \to \ \bullet F,\ \{\epsilon,+,*\}], \\
 & & & & \ [F \to \ \bullet (\,E\,),\ \{\epsilon,+,*\}], \\
 & & & & \ [F \to \ \bullet \mathsf{int},\ \{\epsilon,+,*\}]\}
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{lllll}
q_7 & = & \delta(q_2, *) & = & \{[T \to T*\bullet F \quad], \\
 & & & & \ [F \to \ \bullet (\,E\,) \quad], \\
 & & & & \ [F \to \ \bullet \mathsf{int} \quad]\} \\
 & & & & \\
q_8 & = & \delta(q_5, E) & = & \{[F \to (\,E \bullet\,) \quad]\} \\
 & & & & \ [E \to E\bullet +T \quad]\} \\
 & & & & \\
q_9 & = & \delta(q_6, T) & = & \{[E \to E+T\,\bullet \quad], \\
 & & & & \ [T \to \ T\bullet *F \quad]\} \\
 & & & & \\
q_{10} & = & \delta(q_7, F) & = & \{[T \to T*F\,\bullet \quad]\} \\
 & & & & \\
q_{11} & = & \delta(q_8,\,)\,) & = & \{[F \to (\,E\,)\,\bullet \quad]\}
\end{array}
$$

Der kanonische LR(k)-Automat

im Beispiel:

$$
\begin{array}{lllll}
q_5' & = & \delta(q_5,\, (\,) & = & \{[F \to (\, \bullet E\,),\ \{\,),+,*\}], \\
 & & & & \ [E \to \bullet E+T,\ \{\,),+\}], \\
 & & & & \ [E \to \bullet T,\ \{\,),+\}], \\
 & & & & \ [T \to \bullet T*F,\ \{\,),+,*\}], \\
 & & & & \ [T \to \bullet F,\ \{\,),+,*\}], \\
 & & & & \ [F \to \bullet (\,E\,),\ \{\,),+,*\}], \\
 & & & & \ [F \to \bullet \text{int},\ \{\,),+,*\}]\}
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{lllll}
q_6 & = & \delta(q_1, +) & = & \{[E \to E + \bullet T,\ \{\epsilon,+\}], \\
 & & & & \ [T \to \bullet T*F,\ \{\epsilon,+,*\}], \\
 & & & & \ [T \to \bullet F,\ \{\epsilon,+,*\}], \\
 & & & & \ [F \to \bullet (\,E\,),\ \{\epsilon,+,*\}], \\
 & & & & \ [F \to \bullet \text{int},\ \{\epsilon,+,*\}]\}
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{lllll}
q_7 & = & \delta(q_2, *) & = & \{[T \to T * \bullet F,\ \{\epsilon,+,*\}], \\
 & & & & \ [F \to \bullet (\,E\,),\ \{\epsilon,+,*\}], \\
 & & & & \ [F \to \bullet \text{int},\ \{\epsilon,+,*\}]\} \\
 & & & & \\
q_8 & = & \delta(q_5, E) & = & \{[F \to (\,E \bullet\,),\ \{\epsilon,+,*\}]\} \\
 & & & & \ [E \to E \bullet + T,\ \{\,),+\}]\} \\
 & & & & \\
q_9 & = & \delta(q_6, T) & = & \{[E \to E + T \bullet,\ \{\epsilon,+\}], \\
 & & & & \ [T \to T \bullet * F,\ \{\epsilon,+,*\}]\} \\
 & & & & \\
q_{10} & = & \delta(q_7, F) & = & \{[T \to T * F \bullet,\ \{\epsilon,+,*\}]\} \\
 & & & & \\
q_{11} & = & \delta(q_8,\,)\,) & = & \{[F \to (\,E\,) \bullet,\ \{\epsilon,+,*\}]\}
\end{array}
$$

Der kanonische LR(k)-Automat

im Beispiel:

$$q'_2 = \delta(q'_5, T) = \{[E \to T\bullet,\ \{\,)\,,+\}],\ [T \to T\ \bullet * F,\ \{\,)\,,+,*\}]\}$$

$$q'_3 = \delta(q'_5, F) = \{[F \to F\bullet,\ \{\,)\,,+,*\}]\}$$

$$q'_4 = \delta(q'_5, \text{int}) = \{[F \to \text{int}\bullet,\ \{\,)\,,+,*\}]\}$$

$$q'_6 = \delta(q_8, +) = \{[E \to E + \bullet\, T,\ \{\,)\,,+\}],\ [T \to\ \bullet\, T * F,\ \{\,)\,,+,*\}],\ [T \to\ \bullet\, F,\ \{\,)\,,+,*\}],\ [F \to\ \bullet\, (\,E\,)\,,\ \{\,)\,,+,*\}],\ [F \to\ \bullet\, \text{int},\ \{\,)\,,+,*\}]\}$$

$$q'_7 = \delta(q_9, *) = \{[T \to T * \bullet\, F,\ \{\,)\,,+,*\}],\ [F \to\ \bullet\, (\,E\,)\,,\ \{\,)\,,+,*\}],\ [F \to\ \bullet\, \text{int},\ \{\,)\,,+,*\}]\}$$

$$q'_8 = \delta(q'_5, E) = \{[F \to (\,E\ \bullet\,)\,,\{\,)\,,+,*\}]\ [E \to E\ \bullet + T,\ \{\,)\,,+\}]\}$$

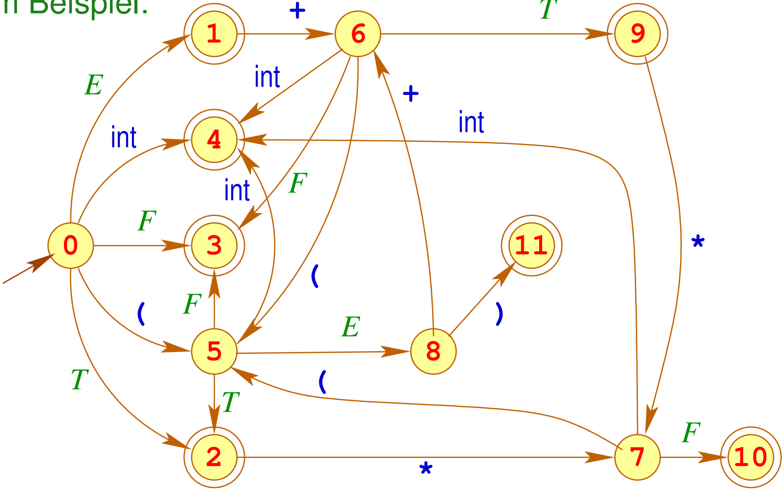
$$q'_9 = \delta(q'_6, T) = \{[E \to E + T\bullet,\ \{\,)\,,+\}],\ [T \to\ T\ \bullet * F,\ \{\,)\,,+,*\}]\}$$

$$q'_{10} = \delta(q'_7, F) = \{[T \to T * F\bullet,\ \{\,)\,,+,*\}]\}$$

$$q'_{11} = \delta(q'_8,\ )\,) = \{[F \to (\,E\,)\,\bullet,\ \{\,)\,,+,*\}]\}$$

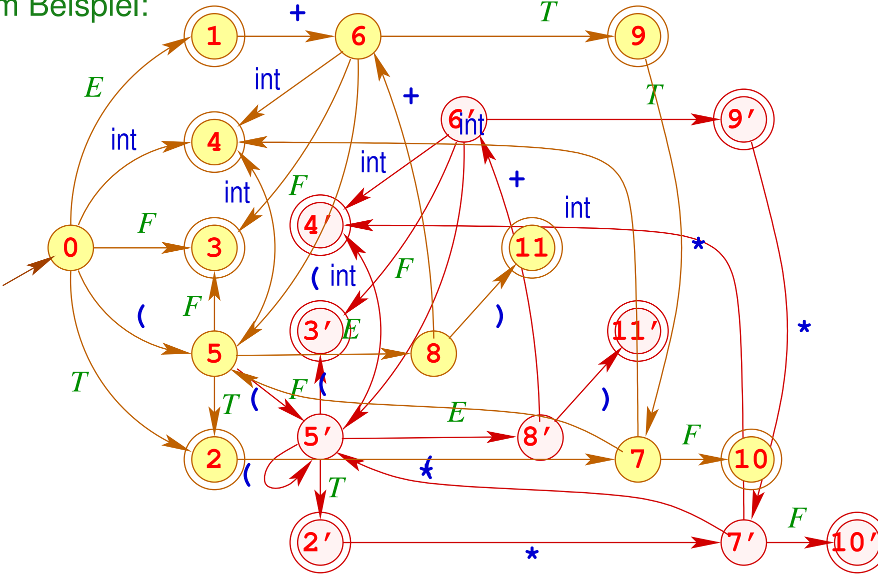
Der kanonische LR(k)-Automat

im Beispiel:



Der kanonische LR(k)-Automat

im Beispiel:



Der kanonische LR(k)-Automat

Diskussion:

- Im Beispiel hat sich die Anzahl der Zustände fast verdoppelt
  ... und es kann noch schlimmer kommen

- Die Konflikte in den Zuständen q_1, q_2, q_9 sind nun aufgelöst !
  z.B. haben wir für:

$$q_9 = \{[E \to E + T\bullet,\ \{\epsilon, +\}], \\ [T \to T \bullet * F,\ \{\epsilon, +, *\}]\}$$

mit:

$$\{\epsilon, +\} \cap (\text{First}_1(* F) \odot \{\epsilon, +, *\}) = \{\epsilon, +\} \cap \{*\} = \emptyset$$

Der kanonische LR(k)-Automat

Allgemein: Wir identifizieren zwei Konflikte:

Reduce-Reduce-Konflikt:

$$[A \to \gamma \bullet, x]\,,\quad [A' \to \gamma' \bullet, x] \quad \in \quad q \quad \text{mit} \quad A \neq A' \vee \gamma \neq \gamma'$$

Shift-Reduce-Konflikt:

$$[A \to \gamma \bullet, x]\,,\quad [A' \to \alpha \bullet a\, \beta, y] \quad \in \quad q \quad \text{mit} \quad a \in T \quad \text{und}$$

$$x \;\in\; \{a\} \odot \text{First}_k(\beta) \odot \{y\}\,.$$

für einen Zustand $q \in Q$.

Solche Zustände nennen wir jetzt $LR(k)$-ungeeignet

Spezielle LR(k)-Teilklassen

Satz:

Eine reduzierte kontextfreie Grammatik G ist genau dann $LR(k)$ wenn der kanonische $LR(k)$-Automat $LR(G, k)$ keine $LR(k)$-ungeeigneten Zustände besitzt.

Spezielle LR(k)-Teilklassen

Satz:

Eine reduzierte kontextfreie Grammatik G ist genau dann $LR(k)$ wenn der kanonische $LR(k)$-Automat $LR(G,k)$ keine $LR(k)$-ungeeigneten Zustände besitzt.

Diskussion:

- Unser Beispiel ist offenbar $LR(1)$
- Im Allgemeinen hat der kanonische $LR(k)$-Automat sehr viel mehr Zustände als $LR(G) = LR(G,0)$
- Man betrachtet darum i.a. Teilklassen von $LR(k)$-Grammatiken, bei denen man nur $LR(G)$ benutzt ...

Spezielle LR(k)-Teilklassen

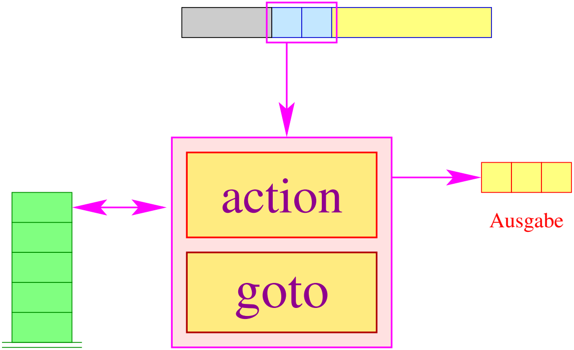
Satz:

Eine reduzierte kontextfreie Grammatik G ist genau dann $LR(k)$ wenn der kanonische $LR(k)$-Automat $LR(G,k)$ keine $LR(k)$-ungeeigneten Zustände besitzt.

Diskussion:

- Unser Beispiel ist offenbar $LR(1)$
- Im Allgemeinen hat der kanonische $LR(k)$-Automat sehr viel mehr Zustände als $LR(G) = LR(G,0)$
- Man betrachtet darum i.a. Teilklassen von $LR(k)$-Grammatiken, bei denen man nur $LR(G)$ benutzt ...
- Zur Konflikt-Auflösung ordnet man den Items in den Zuständen Vorausschau-Mengen zu:
  1. Die Zuordnung ist unabhängig vom Zustand $\Longrightarrow$ Simple $LR(k)$
  2. Die Zuordnung hängt vom Zustand ab $\Longrightarrow$ $LALR(k)$

Der $LR(k)$-Parser:



- Die goto-Tabelle kodiert die Zustandsübergänge:

$$\text{goto}[q, X] = \delta(q, X) \quad \in \quad Q$$

- Die action-Tabelle beschreibt für jeden Zustand q und möglichen Look-ahead w die erforderliche Aktion.

Der $LR(k)$-Parser:

Mögliche Aktionen sind:

shift	//	Shift-Operation
reduce $(A \to \gamma)$	//	Reduktion mit Ausgabe
error	//	Fehler

... im Beispiel:

$$
\begin{array}{lllll}
E & \to & E + T^{\,0} & \mid & T^{\,1} \\
T & \to & T * F^{\,0} & \mid & F^{\,1} \\
F & \to & (\,E\,)^{\,0} & \mid & \mathsf{int}^{\,1}
\end{array}
$$

action	ϵ	int	(	)	$+$	$*$
q_1	$S', 0$					s
q_2	$E, 1$					s
q_2'				$E, 1$		s
q_3	$T, 1$				$T, 1$	$T, 1$
q_3'				$T, 1$	$T, 1$	$T, 1$
q_4	$F, 1$				$F, 1$	$F, 1$
q_4'				$F, 1$	$F, 1$	$F, 1$
q_9	$E, 0$				$E, 0$	s
q_9'				$E, 0$	$E, 0$	s
q_{10}	$T, 0$				$T, 0$	$T, 0$
q_{10}'				$T, 0$	$T, 0$	$T, 0$
q_{11}	$F, 0$				$F, 0$	$F, 0$
q_{11}'				$F, 0$	$F, 0$	$F, 0$