Universität Siegen
Lehrstuhl Theoretische Informatik
Markus Lohrey

Übungsblatt 6

Sei Σ ein Alphabet. Zu $w = a_1 \cdots a_n \in \Sigma^n$, $n \geq 0$, sei $w^R = a_n \cdots a_1$ das umgedrehte Wort. Für $L \subseteq \Sigma^*$ schreiben wir $L^R = \{w^R \in \Sigma^* \mid w \in L\}$.

Aufgabe 1 Betrachten Sie die kontextfreie Grammatik

$$G = (\{S\}, \{a, +, *\}, P, S),$$

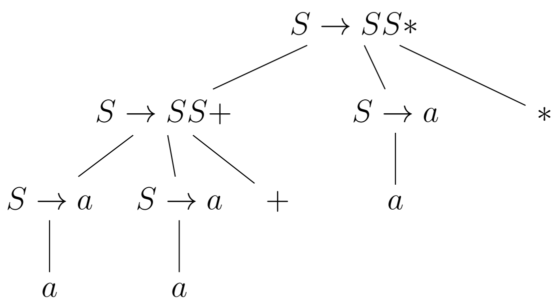
wobei P gegeben ist durch

$$S \to SS+ \mid SS* \mid a.$$

Sei $w = aa + a*$.

(a) Geben Sie zu w alle Syntaxbäume an.

Lösung:
Es gibt nur einen Syntaxbaum zu w:



Bemerkung: Wir schreiben der Deutlichkeit halber die Regeln aus, statt sie zu nummerieren.

(b) Geben Sie alle Links- und Rechtsableitungen an.

Lösung:
Da es nur einen Syntaxbaum gibt, gibt es jeweils genau eine Ableitung.

- Linksbableitung: $(S \to SS*)(S \to SS+)(S \to a)(S \to a)(S \to a)$
- Rechtsableitung: $(S \to SS*)(S \to a)(S \to SS+)(S \to a)(S \to a)$

Bemerkung: Wir schreiben wieder die Regeln aus und fügen Klammern für die Lesbarkeit ein.

Aufgabe 2 Geben Sie kontextfreie Grammatiken zu folgenden Sprachen an:

(a) $L_1 = \{wcw^R \mid w \in \{a, b\}^*\}$

Lösung:
$(\{S\}, \{a, b, c\}, P, S)$, wobei P gegeben ist durch $S \to c \mid aSa \mid bSb$.

(b) $L_2 = \{w \mid w \in \{a, b\}^*,\ w = w^R\}$

Lösung:
$(\{S\}, \{a, b\}, P, S)$, wobei P gegeben ist durch $S \to \varepsilon \mid a \mid b \mid aSa \mid bSb$.

(c) $L_3 = \{a^m b^{2m} \mid m \in \mathbb{N}\}$

Lösung:
$(\{S\}, \{a, b\}, P, S)$, wobei P gegeben ist durch $S \to \varepsilon \mid aSbb$.

(d) $L_4 = \{a^m b^{m+n} c^n \mid m, n \in \mathbb{N}\}$

Lösung:
$(\{S, L, R\}, \{a, b, c\}, P, S)$, wobei P gegeben ist durch

$$\begin{aligned} S &\to LR \\ L &\to \varepsilon \mid aLb \\ R &\to \varepsilon \mid bRc. \end{aligned}$$

(e) $L_5 = \{a^i b^j c^k \mid i, j, k \in \mathbb{N},\ i = j \lor j = k\}$

Lösung:
$(\{S, I, K, L, R\}, \{a, b, c\}, P, S)$, wobei P gegeben ist durch

$$\begin{aligned} S &\to I \mid K \\ I &\to Ic \mid L \\ L &\to \varepsilon \mid aLb \\ K &\to aK \mid R \\ R &\to \varepsilon \mid bRc. \end{aligned}$$

Die Sprache kann man auffassen als

$$L_5 = \{a^i b^i c^k \mid i, k \in \mathbb{N}\} \cup \{a^i b^k c^k \mid i, k \in \mathbb{N}\}.$$

Wir raten ganz zu Anfang, ob wir im linken oder rechten Teil sind. Bemerkung: Die beiden Mengen haben einen nicht leeren Schnitt (nämlich $\{a^i b^i c^i \mid i \in \mathbb{N}\}$). Das heißt, für solche Wörter hat unsere Grammatik zwei Ableitungen. Es ist *nicht* möglich, eine Grammatik für L_5 anzugeben, bei der alle Wörter nur eine Ableitung haben.

(f) Aussagenlogische Ausdrücke (L_6)

Lösung:
Sei var $= \{A_1, A_2, \dots\}$ (atomare Formeln). Die gesuchte Grammatik ist dann

$$G = (\{S\}, \{\text{var}, \wedge, \vee, \neg, (,)\}, P, S)$$

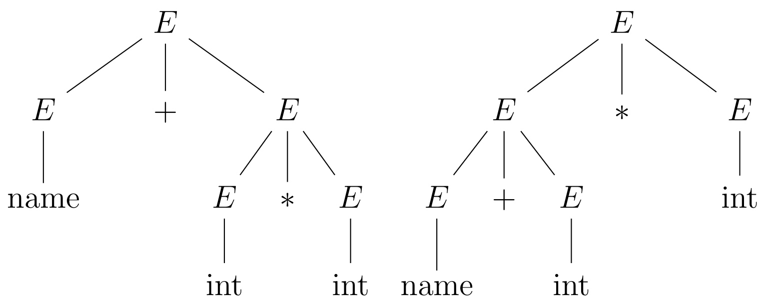
mit $P = \{S \to (S \wedge S) \mid (S \vee S) \mid \neg S \mid \text{var}\}$.

Aufgabe 3 Sei G die erste Grammatik von Folie 94 des Skripts, also $G = (\{E\}, \{\text{name}, \text{int}, +, *, (,)\}, P, E)$ mit

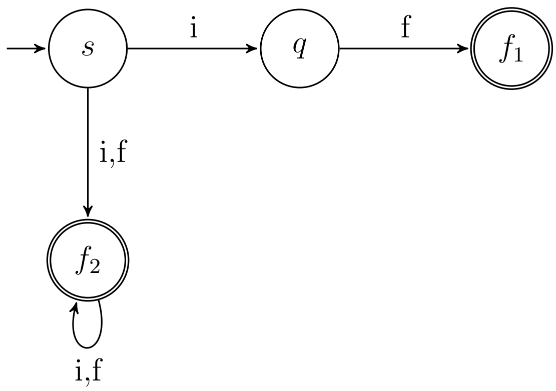
$$P = \{E \to E + E \mid E * E \mid (E) \mid \text{name} \mid \text{int}\}$$

Zeigen Sie, dass diese in der Tat nicht eindeutig ist.

Lösung:
Nehmen wir zum Beispiel das Wort name + int ∗ int. Dieses können wir nur aus dem Ausdruck $E + E * E$ erhalten. Für diesen haben wir allerdings mehrere Möglichkeiten, da wir erst $E + E$ und dann $E * E$ ableiten können oder umgekehrt. Bei der zweiten Grammatik von Folie 94 umgeht man dieses Problem durch mehrere Nichtterminale. Die beiden Ableitungsbäume wollen wir noch veranschaulichen:



Aufgabe 4 (Wiederholung) Gegeben sei folgender NFA:



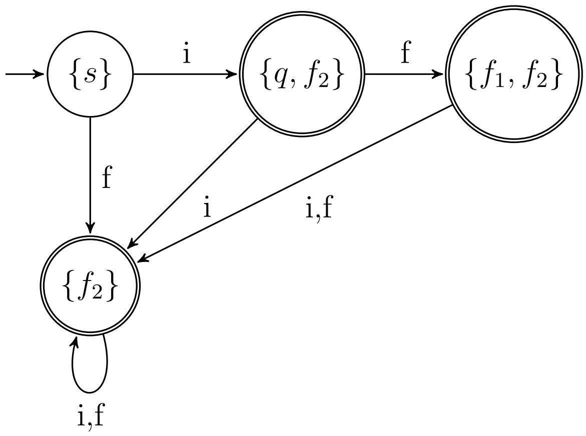
(a) Machen Sie sich intuitiv klar, welche Sprache dieser Automat akzeptiert.

Lösung:
Als regulärer Ausdruck: $(i \mid f)^+$ bzw. $if \mid (i \mid f)^+$

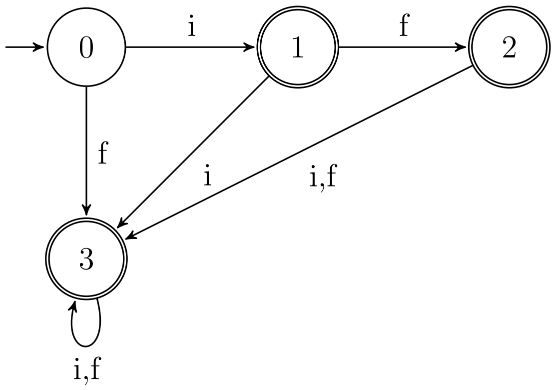
Also Wörter der Länge mindestens 1 über $\{i, f\}$.

(b) Verwenden Sie den Algorithmus aus der Vorlesung, um einen DFA zu erhalten.

Lösung:
Zunächst die Teilmengenkonstruktion:



Wir vereinfachen die Notation und benennen die Zustände um:



(c) Definieren Sie eine geeignete Klassifizierung für die Zustände des Automaten.

Lösung:
$r(0) = 0$, $r(2) = 1$, $r(1) = r(3) = 2$

(d) Minimieren Sie den aus (b) resultierenden DFA.

Lösung:
Schritt 1: End- und Nichtendzustände trennen.

Schritt 2: Endzustände mit unterschiedlichen Klassifizierungen trennen.

Schritt 3: 1 und 3 trennen (markieren), da $\delta(1, f) = 2$ und $\delta(3, f) = 3$ und $(2, 3)$ markiert ist.

1	1	-	-
2	1	2	-
3	1	3	2
	0	1	2

Also sind alle Paare markiert. Der Automat ist bereits minimal.

(e) Wenden Sie das Displacement-Verfahren auf den minimierten DFA an.

Lösung:
Wir können die Übergangsfunktion des minimalen DFA wie folgt darstellen:

	0	1	2	3
i	1	3	3	3
f	3	2	3	3

Wir wählen Default $= 3$ und erhalten

	0	1	2	3
i	1			
f		2		

Damit ergibt sich displacement$(i) = 0$, displacement$(f) = 0$ und

	0	1	2	3
A	1	2		
valid	i	f		