Universität Siegen
Lehrstuhl Theoretische Informatik
Markus Lohrey

Übungsblatt 9

Aufgabe 1 Berechnen Sie $\mathrm{First}_k(L_i)$ für folgende Sprachen L_i:

a) $L_1 = \{w \in \{a,b\}^* \mid w = w^R\}$, $k = 3$

Lösung:
$\mathrm{First}_3(L_1) = \{\varepsilon, a, b, aa, bb\} \cup \{w \in \{a,b\}^* \mid |w| = 3\}$

b) $L_2 = \{a^n bc \mid n \geq 0\}$, $k = 4$

Lösung:
$\mathrm{First}_4(L_2) = \{bc, abc, aabc, aaab, aaaa\}$

c) $L_3 = \{abc^n \mid n \geq 0\}$, $k = 4$

Lösung:
$\mathrm{First}_4(L_3) = \{ab, abc, abcc\}$

d) $L_4 = \{a^n b^{2n} c^m \mid n + m \leq 100\}$, $k = 350$

Lösung:
$\mathrm{First}_{350}(L_4) = L_4$

Aufgabe 2 Zeigen Sie die Aussagen über die Operation $\odot : \mathbb{D}_k \times \mathbb{D}_k \to \mathbb{D}_k$ von Folie 136:

a) $L \odot \emptyset = \emptyset$

b) $\emptyset \odot L = \emptyset$

Lösung:
Es gilt $L_1 \circ L_2 = \{uv \mid u \in L_1, v \in L_2\}$ per Definition. Wenn also L_1 oder L_2 keine Elemente enthält, so ist $L_1 \circ L_2 = \emptyset$. Folglich ist $L \odot \emptyset = \emptyset \odot L = \emptyset$.

c) $L \odot (L_1 \cup L_2) = (L \odot L_1) \cup (L \odot L_2)$

Lösung:
Es gilt:

$$\begin{aligned} L \odot (L_1 \cup L_2) &= \mathrm{First}_k(L \circ (L_1 \cup L_2)) \\ &= \mathrm{First}_k((L \circ L_1) \cup (L \circ L_2)) \\ &= \mathrm{First}_k(L \circ L_1) \cup \mathrm{First}_k(L \circ L_2) \\ &= (L \odot L_1) \cup (L \odot L_2) \end{aligned}$$

Beachte (erstes und letztes Gleichheitszeichen): $L, L_1, L_2 \in \mathbb{D}_k$.

d) $(L_1 \cup L_2) \odot L = (L_1 \odot L) \cup (L_2 \odot L)$

Lösung:
Völlig analog zur c).

Aufgabe 3 Zeigen Sie, dass $(\mathbb{D}_k, \cup, \emptyset, \odot, \{\varepsilon\})$ ein Bewertungshalbring ist, das heißt

(a) $(\mathbb{D}_k, \cup)$ ist ein kommutatives Monoid mit neutralem Element $\emptyset$,

Lösung:

1) $\cup$ ist ein zweistelliger Operator auf $\mathbb{D}_k$, d.h. es gilt $\cup : \mathbb{D}_k \times \mathbb{D}_k \to \mathbb{D}_k$: Klar.
2) Assoziativität ist auch klar.
3) In der Tat gilt $A \cup \emptyset = \emptyset \cup A = A$ für alle $A \in \mathbb{D}_k$.
4) $A \cup B = B \cup A$ ist auch klar.

(b) $(\mathbb{D}_k, \odot)$ ist ein Monoid mit neuralem Element $\{\varepsilon\}$,

Lösung:

1) $\odot$ ist ein zweistelliger Operator auf $\mathbb{D}_k$, d.h. es gilt $\odot : \mathbb{D}_k \times \mathbb{D}_k \to \mathbb{D}_k$: Klar per Definition.
2) Assoziativität: Es gilt

$$\begin{aligned} A \odot (B \odot C) &= \mathrm{First}_k(A \circ (B \odot C)) = \mathrm{First}_k(A \circ \mathrm{First}_k(B \circ C)) \\ &= \mathrm{First}_k(A \circ (B \circ C)) = \mathrm{First}_k((A \circ B) \circ C) \\ &= \mathrm{First}_k(\mathrm{First}_k(A \circ B) \circ C) = \mathrm{First}_k((A \odot B) \circ C) \\ &= (A \odot B) \odot C \end{aligned}$$

Dazu: $\mathrm{First}_k(L_1 \circ L_2) = \mathrm{First}_k(L_1 \circ \mathrm{First}_k(L_2))$ (Fallunterscheidung).

3) Es gilt

$$\begin{aligned} A \odot \{\varepsilon\} &= \mathrm{First}_k(A \circ \{\varepsilon\}) = \mathrm{First}_k(A) = A \\ &= \mathrm{First}_k(\{\varepsilon\} \circ A) = \{\varepsilon\} \odot A \end{aligned}$$

für alle $A \in \mathbb{D}_k$.

(c) es gelten die Distributivgesetze

Lösung:
1) $A \odot (B \cup C) = (A \odot B) \cup (A \odot C)$ und
2) $(B \cup C) \odot A = (B \odot A) \cup (C \odot A)$ klar, wegen Aufgabe 2.

(d) und das neutrale Element bzgl. $\cup$ ist absorbierend für $\odot$.

Lösung:
1) $A \odot \emptyset = \emptyset$ und
2) $\emptyset \odot A = \emptyset$ klar, wegen Aufgabe 2.

Aufgabe 4 Beantworten Sie die folgenden Fragen.

a) Was ist die Aufgabe eines Compilers? Welchen Input bzw. Output hat ein Scanner? Welchen Input bzw. Output hat ein Parser?

Lösung:
Der Compiler generiert aus einem Programmtext einen Code (Maschinenprogramm). Das Maschinenprogramm wiederum kann auf eine Eingabe (effizient) angewendet werden.

Input Scanner: Programmtext
Output Scanner: Tokenstrom
Input Parser: Tokenstrom
Output Parser: Syntaxbaum

b) Sei $e = r_1 \cdot r_2 \cdots r_n$ ein regulärer Ausdruck, wobei $\cdot$ die Konkatenation bezeichne und $n \geq 1$ ist. Sei $F_i = \mathrm{first}[e_i]$ $(1 \leq i \leq n)$ die Menge der ersten Blätter bzw. $L_i = \mathrm{last}[e'_i]$ $(1 \leq i \leq n)$ die Menge der letzten Blätter des regulären Ausdrucks $e_i = r_1 \cdots r_i$ bzw. $e'_i = r_i \cdots r_n$. Welche Mengenbeziehung gilt bzgl. der F_i bzw. L_i? *Hinweis:* Betrachten Sie den jeweils passenden Syntaxbaum.

Lösung:
$F_i \subseteq F_{i+1}$ $(1 \leq i \leq n-1)$ und
$L_i \supseteq L_{i+1}$ $(1 \leq i \leq n-1)$

c) Geben Sie eine kontextfreie Grammatik an, die mehr produktive als erreichbare Nichtterminale besitzt.

Lösung:
$G = (\{S, A\}, \{a, b\}, \{S \to a, A \to b\}, S)$

d) Geben Sie eine kontextfreie Grammatik an, die mehr erreichbare als produktive Nichtterminale besitzt.

Lösung:
$G = (\{S, A\}, \{a\}, \{S \to A\}, S)$ [streng genommen nicht kontextfrei] oder
$G = (\{S, A\}, \{a\}, \{S \to A, S \to a\}, S)$

e) Sei

$$G = (\{S, A, B\}, \{a, b, c, d, e\}, \{S \to AB, S \to BAe, A \to ab, B \to bd\}, S)$$

eine kontextfreie Grammatik. Bestimmen Sie die Kardinalität der Übergangsrelation δ des Shift-Reduce-Parsers $M_G^{(1)}$.

Lösung:
Shift-Übergänge: $(3 + 5 + 2) \cdot 5 = 50$
Reduce-Übergänge: $10 \cdot 4 = 40$
Abschluss: 1
Ingesamt: $50 + 40 + 1 = 91$