Übungsblatt 11

Aufgabe 1 Sei $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 1$, und sei $G = (\{S\}, \{a\}, P, S)$, wobei P gegeben ist durch

$$S \to a^k \mid a^{k+1}$$

Zeigen Sie, dass $G \in LL(k+1)$ und dass $G \notin LL(k)$ ist.

Lösung:
Die einzige Linksableitung, bei der ein Nichtterminal auf der rechten Seite steht, ist $S \to_L^* S$. Es gilt also $S \to_L^* uA\beta$ mit $u = \beta = \varepsilon$ und $A = S$. Ferner ist $\mathrm{First}_k(a^k) \cap \mathrm{First}_k(a^{k+1}) = \{a^k\}$, also $G \notin LL(k)$. Andererseits gilt $\mathrm{First}_{k+1}(a^k) = \{a^k\}$ und $\mathrm{First}_{k+1}(a^{k+1}) = \{a^{k+1}\}$, wobei $\{a^k\} \cap \{a^{k+1}\} = \emptyset$, also $G \in LL(k+1)$.

Aufgabe 2 Sei $G = (\{E, C, F\}, \{a, +, \langle, \rangle\}, P, E)$, wobei P gegeben ist durch:

$$\begin{aligned} E &\to FC \\ C &\to +FC \mid \varepsilon \\ F &\to \langle E \rangle \mid a \end{aligned}$$

Berechnen Sie die Vorausschautabelle für $k = 1$. Es genügt, wenn Sie die erreichbaren Zustände angeben. Sie können verwenden, dass

$$\begin{aligned} &\mathrm{First}_1(E) = \mathrm{First}_1(F) = \{a, \langle\} \text{ und} \\ &\mathrm{First}_1(C) = \{\varepsilon, +\}. \end{aligned}$$

Lösung:

	a	$+$	$\langle$	$\rangle$	ε
$[E' \to \bullet E, \{\varepsilon\}]$	$E \to FC$		$E \to FC$		
$[E \to \bullet FC, \{\varepsilon\}]$	$F \to a$		$F \to \langle E \rangle$		
$[E \to F \bullet C, \{\varepsilon\}]$		$C \to +FC$			$C \to \varepsilon$
$[F \to \langle \bullet E \rangle, \{+, \varepsilon\}]$	$E \to FC$		$E \to FC$		
$[C \to +\bullet FC, \{\varepsilon\}]$	$F \to a$		$F \to \langle E \rangle$		
$[C \to +F \bullet C, \{\varepsilon\}]$		$C \to +FC$			$C \to \varepsilon$
$[E \to \bullet FC, \{\rangle\}]$	$F \to a$		$F \to \langle E \rangle$		
$[E \to F \bullet C, \{\rangle\}]$		$C \to +FC$		$C \to \varepsilon$	
$[F \to \langle \bullet E \rangle, \{+, \rangle\}]$	$E \to FC$		$E \to FC$		
$[C \to +\bullet FC, \{\rangle\}]$	$F \to a$		$F \to \langle E \rangle$		
$[C \to +F \bullet C, \{\rangle\}]$		$C \to +FC$		$C \to \varepsilon$	

Achtung: Die Tabelle kann für unerreichbare Zustände mehrere Einträge haben, obwohl die Grammatik LL(1) ist, zum Beispiel

$$M([E \to F\bullet C, \{+\}], +) = \{C \to \varepsilon, C \to +FC\}.$$

Aber: Ein Lookahead von + ist bei E nicht möglich, denn $+ \notin \mathrm{Follow}_1(E)$.

Aufgabe 3 Sei $G = (\{S, F\}, \{a, +, \langle, \rangle\}, P, S)$, wobei P gegeben ist durch:

$$\begin{aligned} S &\to F \mid \langle S{+}F\rangle \\ F &\to a \end{aligned}$$

(a) Berechnen Sie First_1 für jedes Nichtterminal.

Lösung:
Das Ungleichungssystem ist

$$\begin{aligned} \mathrm{First}_1(S) &\supseteq \mathrm{First}_1(F) \cup \mathrm{First}_1(\langle S{+}F\rangle), \\ \mathrm{First}_1(F) &\supseteq \mathrm{First}_1(a). \end{aligned}$$

Wir starten mit $\mathrm{First}_1(S) \supseteq \emptyset$ und $\mathrm{First}_1(F) \supseteq \emptyset$, also

$$\begin{aligned} \mathrm{First}_1(S) &\supseteq \emptyset \cup (\{\langle\} \odot_1 \emptyset \odot_1 \{+\} \odot_1 \emptyset \odot_1 \{\rangle\}) \\ &= \emptyset, \\ \mathrm{First}_1(F) &\supseteq \{a\}. \end{aligned}$$

Wir haben also $\mathrm{First}_1(S) \supseteq \emptyset$ und $\mathrm{First}_1(F) \supseteq \{a\}$ und erhalten

$$\begin{aligned} \mathrm{First}_1(S) &\supseteq \{a\} \cup (\{\langle\} \odot_1 \emptyset \odot_1 \{+\} \odot_1 \{a\} \odot_1 \{\rangle\}) \\ &= \{a\}, \\ \mathrm{First}_1(F) &\supseteq \{a\}. \end{aligned}$$

Wir haben also $\mathrm{First}_1(S) \supseteq \{a\}$ und $\mathrm{First}_1(F) \supseteq \{a\}$ und erhalten

$$\begin{aligned} \mathrm{First}_1(S) &\supseteq \{a\} \cup (\{\langle\} \odot_1 \{a\} \odot_1 \{+\} \odot_1 \{a\} \odot_1 \{\rangle\}) \\ &= \{a, \langle\}, \\ \mathrm{First}_1(F) &\supseteq \{a\}. \end{aligned}$$

Wir haben also $\mathrm{First}_1(S) \supseteq \{a, \langle\}$ und $\mathrm{First}_1(F) \supseteq \{a\}$ und erhalten

$$\begin{aligned} \mathrm{First}_1(S) &\supseteq \{a\} \cup (\{\langle\} \odot_1 \{\langle, a\} \odot_1 \{+\} \odot_1 \{a\} \odot_1 \{\rangle\}) \\ &= \{a, \langle\}, \\ \mathrm{First}_1(F) &\supseteq \{a\}. \end{aligned}$$

Da wir wieder $\text{First}_1(S) \supseteq \{a, \langle\}$ und $\text{First}_1(F) \supseteq \{a\}$ erhalten haben, gilt $\text{First}_1(S) = \{a, \langle\}$ und $\text{First}_1(F) = \{a\}$.

Wie schon auf Blatt 10 ist es in Ordnung, wenn wir nach Aufstellung des Ungleichungssystems (inkl. Vereinfachung) die Tabellenform benutzen.

(b) Geben Sie alle erreichbaren Expansionsübergänge des erweiterten Itemkellerautomaten für $k = 1$ an.

Lösung:

$$
\begin{array}{l}
([S' \to \bullet S, \{\varepsilon\}], \varepsilon, [S' \to \bullet S, \{\varepsilon\}][S \to \bullet F, \{\varepsilon\}]) \\
([S' \to \bullet S, \{\varepsilon\}], \varepsilon, [S' \to \bullet S, \{\varepsilon\}][S \to \bullet \langle S{+}F\rangle, \{\varepsilon\}]) \\
\hline
([S \to \bullet F, \{\varepsilon\}], \varepsilon, [S \to \bullet F, \{\varepsilon\}][F \to \bullet a, \{\varepsilon\}]) \\
\hline
([S \to \langle \bullet S{+}F\rangle, \{\varepsilon\}], \varepsilon, [S \to \langle \bullet S{+}F\rangle, \{\varepsilon\}][S \to \bullet F, \{+\}]) \\
([S \to \langle \bullet S{+}F\rangle, \{\varepsilon\}], \varepsilon, [S \to \langle \bullet S{+}F\rangle, \{\varepsilon\}][S \to \bullet \langle S{+}F\rangle, \{+\}]) \\
([S \to \langle S{+}\bullet F\rangle, \{\varepsilon\}], \varepsilon, [S \to \langle S{+}\bullet F\rangle, \{\varepsilon\}][F \to \bullet a, \{\rangle\}]) \\
\hline
([S \to \bullet F, \{+\}], \varepsilon, [S \to \bullet F, \{+\}][F \to \bullet a, \{+\}) \\
\hline
([S \to \langle \bullet S{+}F\rangle, \{+\}], \varepsilon, [S \to \langle \bullet S{+}F\rangle, \{+\}][S \to \bullet F, \{+\}]) \\
([S \to \langle \bullet S{+}F\rangle, \{+\}], \varepsilon, [S \to \langle \bullet S{+}F\rangle, \{+\}][S \to \bullet \langle S{+}F\rangle, \{+\}]) \\
([S \to \langle S{+}\bullet F\rangle, \{+\}], \varepsilon, [S \to \langle S{+}\bullet F\rangle, \{+\}][F \to \bullet a, \{\rangle\}]) \\
\hline
\end{array}
$$

(c) Geben Sie die Vorausschautabelle für $k = 1$ an. Es genügt, die erreichbaren Zustände anzugeben.

Lösung:

	a	$+$	$\langle$	$\rangle$	ε
$[S' \to \bullet S, \{\varepsilon\}]$	$S \to F$		$S \to \langle S{+}F\rangle$		
$[S \to \bullet F, \{\varepsilon\}]$	$F \to a$				
$[S \to \langle \bullet S{+}F\rangle, \{\varepsilon\}]$	$S \to F$		$S \to \langle S{+}F\rangle$		
$[S \to \langle S{+}\bullet F\rangle, \{\varepsilon\}]$	$F \to a$				
$[S \to \bullet F, \{+\}]$	$F \to a$				
$[S \to \langle \bullet S{+}F\rangle, \{+\}]$	$S \to F$		$S \to \langle S{+}F\rangle$		
$[S \to \langle S{+}\bullet F\rangle, \{+\}]$	$F \to a$				

(d) Verwenden Sie die Vorausschautabelle, um eine akzeptierende Konfigurationsfolge für $\langle a{+}a\rangle$ anzugeben.

Lösung:
Wir starten mit $([S' \to \bullet S, \{\varepsilon\}], \langle a{+}a\rangle)$. Für das Item $[S' \to \bullet S, \{\varepsilon\}]$ und das nächste Eingabesymbol $\langle$ steht in der Vorausschautabelle, dass wir die Regel $S \to \langle S{+}F\rangle$ anwenden müssen. Dies entspricht einem Übergang zu

$$([S' \to \bullet S, \{\varepsilon\}][S \to \bullet\langle S{+}F\rangle, \{\varepsilon\}], \langle a{+}a\rangle).$$

Mit einem Shift-Übergang erhalten wir

$$([S' \to \bullet S, \{\varepsilon\}][S \to \langle\bullet S{+}F\rangle, \{\varepsilon\}], a{+}a\rangle).$$

Für das Item $[S \to \langle\bullet S{+}F\rangle, \{\varepsilon\}]$ und das nächste Eingabesymbol a müssen wir die Regel $S \to F$ anwenden. Dies entspricht einem Übergang zu

$$([S' \to \bullet S, \{\varepsilon\}][S \to \langle\bullet S{+}F\rangle, \{\varepsilon\}][S \to \bullet F, \{+\}], a{+}a\rangle).$$

Für das Item $[S \to \bullet F, \{+\}]$ und das nächste Eingabesymbol a müssen wir die Regel $F \to a$ anwenden. Dies entspricht einem Übergang zu

$$([S' \to \bullet S, \{\varepsilon\}][S \to \langle\bullet S{+}F\rangle, \{\varepsilon\}][S \to \bullet F, \{+\}][F \to \bullet a, \{+\}], a{+}a\rangle).$$

Dann geht es weiter mit

$$\begin{aligned}
&([S' \to \bullet S, \{\varepsilon\}][S \to \langle\bullet S{+}F\rangle, \{\varepsilon\}][S \to \bullet F, \{+\}][F \to a\bullet, \{+\}], {+}a\rangle)\\
&\vdash ([S' \to \bullet S, \{\varepsilon\}][S \to \langle\bullet S{+}F\rangle, \{\varepsilon\}][S \to F\bullet, \{+\}], {+}a\rangle)\\
&\vdash ([S' \to \bullet S, \{\varepsilon\}][S \to \langle S\bullet{+}F\rangle, \{\varepsilon\}], {+}a\rangle)\\
&\vdash ([S' \to \bullet S, \{\varepsilon\}][S \to \langle S{+}\bullet F\rangle, \{\varepsilon\}], a\rangle).
\end{aligned}$$

Für das Item $[S \to \langle S{+}\bullet F\rangle, \{\varepsilon\}]$ und das nächste Eingabesymbol a müssen wir die Regel $F \to a$ anwenden. Dies entspricht einem Übergang zu

$$([S' \to \bullet S, \{\varepsilon\}][S \to \langle S{+}\bullet F\rangle, \{\varepsilon\}][F \to \bullet a, \{\rangle\}], a\rangle).$$

Dann geht es weiter mit

$$\begin{aligned}
&([S' \to \bullet S, \{\varepsilon\}][S \to \langle S{+}\bullet F\rangle, \{\varepsilon\}][F \to a\bullet, \{\rangle\}], \rangle)\\
&\vdash ([S' \to \bullet S, \{\varepsilon\}][S \to \langle S{+}F\bullet\rangle, \{\varepsilon\}], \rangle)\\
&\vdash ([S' \to \bullet S, \{\varepsilon\}][S \to \langle S{+}F\rangle\bullet, \{\varepsilon\}], \varepsilon)\\
&\vdash ([S' \to S\bullet, \{\varepsilon\}], \varepsilon).
\end{aligned}$$

Aufgabe 4 Sei $\mathcal{G}$ die Menge der kontextfreien Grammatiken. Wir nennen $G \in \mathcal{G}$ eine LL-Grammatik, wenn es ein $k \in \mathbb{N}$ gibt mit $G \in LL(k)$. Sei $\ell\colon \mathcal{G} \to \mathbb{N}_\perp$ mit

$$\ell(G) = \begin{cases} \min(\{k \in \mathbb{N} \mid G \in LL(k)\}) & \text{falls } G \text{ eine LL-Grammatik ist,} \\ \perp & \text{sonst.} \end{cases}$$

Bestimmen Sie ℓ für folgende Grammatiken:

1. $G_1 = (\{S\}, \{a\}, P_1, S)$, wobei P_1 gegeben ist durch $S \to a \mid \varepsilon$.
2. $G_2 = (\{S\}, \{a, b\}, P_2, S)$, wobei P_2 gegeben ist durch $S \to a \mid b$.
3. $G_3 = (\{S\}, \{a, b\}, P_3, S)$, wobei P_3 gegeben ist durch $S \to aa \mid ab$.
4. $G_4 = (\{S\}, \{a, b\}, P_4, S)$, wobei P_4 gegeben ist durch $S \to aa \mid bb$.
5. $G_5 = (\{S\}, \{a\}, P_5, S)$, wobei P_5 gegeben ist durch $S \to a$.
6. $G_6 = (\{S\}, \{a\}, P_6, S)$, wobei P_6 gegeben ist durch $S \to a \mid aa$.
7. $G_7 = (\{S\}, \{a\}, P_7, S)$, wobei P_7 gegeben ist durch $S \to aa \mid aaa$.
8. $G_8 = (\{S\}, \{a\}, P_8, S)$, wobei P_8 gegeben ist durch $S \to Sa \mid \varepsilon$.
9. $G_9 = (\{S\}, \{a\}, P_9, S)$, wobei P_9 gegeben ist durch $S \to aS \mid \varepsilon$.
10. $G_{10} = (\{S\}, \{a, +\}, P_{10}, S)$, wobei P_{10} gegeben ist durch $S \to S{+}S \mid a$.
11. $G_{11} = (\{S\}, \{a, +\}, P_{11}, S)$, wobei P_{11} gegeben ist durch $S \to SS{+} \mid a$.

Sei $\mathcal{G}\colon \mathcal{P}(\Sigma^*) \to \mathcal{P}(\mathcal{G})$ definiert als

$$\mathcal{G}(L) = \{G \in \mathcal{G} \mid L(G) = L\}$$

und $\ell\colon \mathcal{P}(\Sigma^*) \to \mathbb{N}_\perp$ (wobei $\perp < i$ für alle $i \in \mathbb{N}$) als

$$\ell(L) = \min(\{\ell(G) \mid G \in \mathcal{G}(L)\}).$$

Bestimmen Sie $\ell(L(G))$ für jede Grammatik G aus der obigen Liste.

Lösung:

i	$\ell(G_i)$	$\ell(L(G_i))$
1	1	1
2	1	1
3	2	1
4	1	1
5	0	0
6	2	1
7	3	1
8	$\perp$	1
9	1	1
10	$\perp$	1
11	$\perp$	$\perp$