

## Übungsblatt 2

**Aufgabe 1.** Beweisen oder widerlegen Sie die Erfüllbarkeit der folgenden Formeln und Formelmengen:

- a)  $(A \vee \neg B \vee \neg C) \wedge (B \vee \neg C \vee D) \wedge (\neg A \vee B \vee \neg D) \wedge (A \vee C \vee D)$
- b)  $(A \vee B \vee C) \wedge (\neg A \vee \neg B \vee \neg C) \wedge (A \vee \neg B) \wedge (B \vee \neg C) \wedge (\neg A \vee C)$
- c)  $\{\bigvee_{i=1}^n \bigwedge_{j=1}^n L_{i,j} \mid n \in \mathbb{N}\}$ , wobei  $L_{i,j} = \begin{cases} A_j, & \text{wenn } i = j, \\ \neg A_j, & \text{wenn } i \neq j \end{cases}$

**Aufgabe 2.** Welche der folgenden Folgerungsbeziehungen  $F_1, \dots, F_k \models F$  sind wahr? Geben Sie jeweils einen Beweis an oder eine Belegung  $\mathcal{B}$  mit  $\mathcal{B} \models F_i$  für alle  $1 \leq i \leq k$  und  $\mathcal{B} \not\models F$ .

- a)  $\neg A \vee \neg B, A \vee (B \wedge \neg C) \models A \vee C$
- b)  $A \vee B, B \vee C, B \rightarrow (A \wedge C) \models C \rightarrow A$
- c)  $A \rightarrow B, (B \leftrightarrow C) \rightarrow A \models (C \rightarrow A) \rightarrow B$

**Aufgabe 3.** Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen für beliebige Formeln  $F, G, H$ :

- a) Aus  $F \equiv G \vee H$  folgt  $F \equiv G$  oder  $F \equiv H$ .
- b) Aus  $F \rightarrow G \equiv G \rightarrow F$  folgt  $F \equiv G$ .
- c) Gegeben seien Formeln  $F, G$  über einer Menge  $D$  von atomaren Formeln und eine Abbildung  $\pi : D \rightarrow D$ . Aus  $F \equiv G$  folgt  $\pi(F) \equiv \pi(G)$ .  
*Hinweis:* Die Formel  $\pi(F)$  entsteht aus  $F$ , indem jedes Vorkommen einer atomaren Formel  $A$  durch  $\pi(A)$  ersetzt wird.
- d) Angenommen  $F, G \models H$  und  $F, H \models G$  und  $G, H \models F$ . Dann sind alle drei Formeln äquivalent zueinander.
- e) Kann man in Aufgabenteil d) schließen, dass mindestens zwei der drei Formeln äquivalent zueinander sind?

**Aufgabe 4.** Zeigen Sie, dass über den atomaren Formeln  $A_1, \dots, A_n$  genau  $2^{2^n}$  Formeln existieren, die paarweise nicht äquivalent sind.