

## Übungsblatt 3

**Aufgabe 1.** Zeigen Sie die folgenden Äquivalenzen mit Hilfe der Äquivalenzregeln aus der Vorlesung (siehe Folien 64–65):

a)  $\neg A \wedge B \wedge C \equiv \neg A \wedge ((C \wedge D) \vee (C \wedge \neg D)) \wedge (A \vee B)$

b)  $A \wedge \neg(B \vee (C \wedge \neg D)) \equiv (\neg A \vee B \vee C) \rightarrow \neg(A \wedge D \rightarrow B)$

**Aufgabe 2.** Zu jeder aussagenlogischen Formel existieren äquivalente Formeln in konjunktiver und disjunktiver Normalform, die jedoch exponentiell größer als die Ausgangsformel sein können. Die *Länge* einer Formel  $F$  in KNF (oder DNF) ist die Anzahl der Klauseln (bzw. Konjunktionsterme) in  $F$ .

a) Betrachte  $F_n = \bigwedge_{i=1}^n (A_{2i-1} \leftrightarrow A_{2i})$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ . Zeigen Sie, dass jede zu  $F_n$  äquivalente Formel in DNF mindestens Länge  $2^n$  hat. Was können Sie über  $\neg F_n$  aussagen?

b) Betrachte  $F_1 = \neg A_1$  und  $F_{n+1} = F_n \leftrightarrow \neg A_{n+1}$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ . Zeigen Sie, dass jede zu  $F_n$  äquivalente Formel in DNF oder KNF mindestens Länge  $2^{n-1}$  hat.

**Aufgabe 3.** Zeigen Sie die folgenden Behauptungen durch geeignetes Anwenden des Markierungsalgorithmus.

a) Die folgende Formel ist erfüllbar:

$$(1 \rightarrow A) \wedge (A \rightarrow B) \wedge (A \rightarrow C) \wedge (A \wedge B \wedge C \rightarrow D) \\ \wedge (D \wedge E \rightarrow F) \wedge (F \rightarrow 0)$$

b) Die folgende Formel ist gültig:

$$(A \wedge D \wedge \neg I) \vee (B \wedge \neg D \wedge E) \vee (\neg A \wedge B \wedge C \wedge H) \vee (\neg E \wedge F) \\ \vee (\neg C \wedge F) \vee (G \wedge \neg H) \vee \neg B \vee \neg F \vee \neg G \vee I$$

c)  $B \wedge D \rightarrow A, B \wedge G \rightarrow F, A \wedge C \wedge F \rightarrow E, B, D \models E \vee \neg G \vee (\neg C \wedge D)$