Universität Siegen
Lehrstuhl Theoretische Informatik
Markus Lohrey und Moses Ganardi

Übungsblatt 4

Aufgabe 1. Überprüfen Sie mit dem Resolutionsverfahren, ob die folgenden Klauselmengen erfüllbar sind.

a) $\{\{A, B, C\}, \{\neg A, \neg B, \neg C\}, \{A, \neg B\}, \{B, \neg C\}, \{\neg A, C\}\}$

b) $\{\{A, \neg B\}, \{\neg A, \neg C\}, \{\neg A, C, D\}, \{\neg D\}, \{B, D\}\}$

c) $\{\{A, C\}, \{B\}, \{\neg C\}, \{A, \neg B, D\}, \{A, \neg C, \neg D\}\}$

Aufgabe 2. Wir modifizieren den Begriff der Resolvente: Eine Klausel R heißt *Resolvente* von Klauseln K_1 und K_2, falls Literale L_1, L_2 existieren mit $L_1, L_2 \in K_1$ und $\overline{L}_1, \overline{L}_2 \in K_2$, so dass

$$R = (K_1 \setminus \{L_1, L_2\}) \cup (K_2 \setminus \{\overline{L}_1, \overline{L}_2\}).$$

Ist der so definierte Resolutionskalkül korrekt? Ist er vollständig?

Aufgabe 3. Ein Graph $G = (V, E)$ heißt *k-färbbar*, wenn eine Funktion $f : V \to \{1, \ldots, k\}$ existiert, so dass $f(u) \neq f(v)$ für alle $(u, v) \in E$. Zeigen Sie, dass ein abzählbar unendlicher Graph genau dann k-färbbar ist, wenn jeder endliche Teilgraph k-färbbar ist.

Hinweis: Verwenden Sie atomare Formeln $A_{v,i}$ mit der Bedeutung, dass Knoten v Farbe i erhält. Formalisieren Sie die k-Färbbarkeit des Graphen durch eine Menge von Formeln und zeigen Sie mit dem Endlichkeitssatz, dass diese Formelmenge erfüllbar ist.

Aufgabe 4. Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Behauptungen:

1. Wenn $F_1, \ldots, F_k \models F$ gilt, dann gilt auch $F_i \models F$ für ein $i \in \{1, \ldots, k\}$.
2. Wenn $F \equiv G$ gilt, so kommen in F und G die gleichen atomaren Formeln vor.
3. Jede Formel, die nur aus atomaren Formeln, $\vee$ und $\wedge$ aufgebaut ist, ist erfüllbar.
4. Sei M eine Formelmenge. Ist M unerfüllbar, so ist jede endliche Teilmenge von M unerfüllbar.
5. Sei M eine unendliche Formelmenge. Ist M unerfüllbar, so existiert eine Formel $F \in M$, so dass auch $M \setminus \{F\}$ unerfüllbar ist.