Universität Siegen
Lehrstuhl Theoretische Informatik
Markus Lohrey und Moses Ganardi

Logik
SS 2014

Übungsblatt 5

Aufgabe 1. Gegeben seien ein zweistelliges Funktionssymbol f und ein zweistelliges Prädikatensymbol R. Betrachten Sie die folgenden drei Strukturen:

- $\mathcal{C} = (\{0,1,2\}, I_{\mathcal{C}})$, wobei $f^{\mathcal{C}}(x,y) = x,\ R^{\mathcal{C}} = \{(0,1),(1,2),(2,0)\}$
- $\mathcal{N} = (\mathbb{N}, I_{\mathcal{N}})$, wobei $f^{\mathcal{N}}(x,y) = x \cdot y,\ R^{\mathcal{N}} = \{(x,y) \in \mathbb{N}^2 \mid x \le y\}$
- $\mathcal{P} = (2^{\mathbb{N}}, I_{\mathcal{P}})$, wobei $f^{\mathcal{P}}(x,y) = x \cap y,\ R^{\mathcal{P}} = \{(x,y) \in 2^{\mathbb{N}} \times 2^{\mathbb{N}} \mid x \subseteq y\}$

In welchen Strukturen gelten die folgenden Aussagen?

a) $\exists x \forall y R(y,x)$

b) $\forall x \forall y (R(x,y) \lor R(y,x))$

c) $\forall x \exists y \exists z (y \neq z \land f(y,z) = x)$

d) $\forall x \forall y \forall z \forall w (R(x,y) \land R(z,w) \to R(f(x,z), f(y,w)))$

Aufgabe 2. Wir betrachten die Struktur $\mathcal{N} = (\mathbb{N}, I_{\mathcal{N}})$ über den natürlichen Zahlen mit den Funktionssymbolen $+$ und $\cdot$ (mit der üblichen Bedeutung). Formalisieren Sie die folgenden Eigenschaften durch prädikatenlogische Formeln. Achten Sie dabei auf die Verwendung freier Variablen.

a) $x + 1 = y$

b) x ist ungerade

c) x und y sind teilerfremd

d) x ist eine Primzahl

Aufgabe 3. Seien F, G beliebige prädikatenlogische Formeln. Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen:

a) $\exists x F \lor \exists x G \equiv \exists x (F \lor G)$

b) $\exists x F \land \exists x G \equiv \exists x (F \land G)$

Aufgabe 4. Gegeben sei die folgende Formel

$$F = \exists x \Big(\big(\exists y R(x,y)\big) \to \exists r R(r, f(y,z)) \Big) \land \forall x \neg \exists z \big(P(z) \land \forall w R(x,w)\big).$$

a) Berechnen Sie eine Formel G in BPF, die zu F äquivalent ist.

b) Berechnen Sie eine Skolemform von G.