

## Übungsblatt 12

**Aufgabe 1.** Bestimmen Sie die Anzahl der Nullstellen von  $f(x) = x^4 - x^2 - 1$  im Intervall  $(-2, 2)$  mit dem Satz von Sturm und Tarski.

**Aufgabe 2.** Zeigen Sie, dass die Menge der natürlichen Zahlen nicht in der reellen Arithmetik definierbar ist (ohne zu verwenden, dass  $\text{Th}(\mathbb{N}, +, \cdot)$  unentscheidbar ist).

**Aufgabe 3.** Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

- a)  $\text{Th}(\mathbb{C}, +, \cdot)$  ist entscheidbar.
- b)  $\text{Th}(\mathbb{Z}, +, \cdot)$  ist unentscheidbar.

*Hinweis:* Verwenden Sie für b) den Satz von Lagrange: Jede natürliche Zahl lässt sich als Summe vierer Quadratzahlen schreiben.