Klausur zur Vorlesung „Grundlagen der Theoretischen Informatik“

SS 2014 / 15. September 2014

Vorname: ______________________________

Nachname: ______________________________

Matrikelnummer: ______________________________

Aufgabe	**Punktzahl**	**Erreicht**
1	20	
2	9	
3	7	
4	6	
5	6	
6	6	
7	6	
8	8	
9	4	
10	4	
11	5	
12	6	
13	4	
14	3	
15	6	
16	0	
$\boldsymbol{\Sigma}$	100	

Generelle Hinweise:

- Prüfungsdauer: **180 Minuten**
- Wenn Sie in der Klausur **50 Punkte** erreichen, haben Sie mit Sicherheit bestanden.
- Hilfsmittel: Ein beidseitig beschriebenes DIN A4 Blatt.
- Benutzen Sie ein **dokumentenechtes Schreibgerät**.
- Überprüfen Sie die Ihnen ausgehändigte Klausur auf Vollständigkeit (**15 Aufgaben + 1 Bonusaufgabe** auf 17 Seiten inkl. Deckblatt).
- Tragen Sie **auf jedes Blatt** Ihren **Namen** und Ihre **Matr.-Nr.** in die entsprechenden Felder ein.
- Schreiben Sie ihre Lösungen in die dafür vorgesehenen Felder. Reicht der Platz in einem Feld nicht aus, so benutzen Sie die Rückseite des entsprechenden Blattes und vermerken Sie dies auf der Vorderseite. Reicht der Platz dennoch nicht aus, können Sie die Aufsicht nach zusätzlichen Blättern fragen.
- Schreiben Sie bitte **deutlich**. Unleserliche Lösungen sind ungültig.
- Ein **Täuschungsversuch** führt umgehend zum Ausschluss und **Nichtbestehen**. Es erfolgt keine Vorwarnung.
- Alle mitgeführten **elektronischen Geräte** sind vor der Klausur bzw. spätestens jetzt auszuschalten.
- Die **Klausurergebnisse** werden zusammen mit den Matrikelnummern auf die GTI-Webseite gestellt. Sollten Sie damit nicht einverstanden sein, so weisen Sie uns bitte darauf hin.

Inhaltliche Hinweise:

- Endliche Automaten können wahlweise graphisch oder tabellarisch angegeben werden.
- In den WHILE- und LOOP-Programmen dürfen Sie die Addition, Multiplikation, die in der Vorlesung definierte Subtraktion und für eine Variable x die Bedingung IF $x = 0$ THEN P END als WHILE- bzw. LOOP-berechenbar voraussetzen und in Ihren Programmen verwenden. Geben Sie an, in welcher Variable der Ausgabewert am Ende steht.
- Sie dürfen annehmen, dass die Addition und Multiplikation zweier natürlicher Zahlen primitiv rekursiv sind.
- Für die Konstruktion von μ- bzw. primitiv rekursiven Funktionen und für WHILE- und LOOP-Programme darf die Schreibweise aus den Übungen benutzt werden.

Aufgabe 1. (20 Punkte) Richtige Antwort = 1 Punkt, falsche Antwort = −1 Punkt, weiß nicht = 0 Punkte. Sie können bei dieser Aufgabe nicht weniger als 0 Punkte erzielen.

(1) Für alle Sprachen L gilt $(L^*)^* = L^*$.

◯ wahr ◯ falsch ◯ weiß nicht

(2) Für alle Sprachen L_1, L_2 gilt $L_1^* \cdot L_2^* = (L_1 \cdot L_2)^*$.

◯ wahr ◯ falsch ◯ weiß nicht

(3) Zu jedem NFA M mit n Zuständen existiert ein DFA M' mit höchstens 2^n Zuständen, so dass gilt $T(M) = T(M')$.

◯ wahr ◯ falsch ◯ weiß nicht

(4) Sei L eine reguläre Sprache und seien $w_1, w_2 \in L$. Dann ist $w_1 \cdot w_2 \in L$.

◯ wahr ◯ falsch ◯ weiß nicht

(5) Jede Teilmenge einer regulären Sprache L ist regulär.

◯ wahr ◯ falsch ◯ weiß nicht

(6) Sei Σ ein Alphabet mit $|\Sigma| = 1$. Dann ist jedes $L \subseteq \Sigma^*$ regulär.

◯ wahr ◯ falsch ◯ weiß nicht

(7) Welche der folgenden Aussagen beschreibt die Myhill-Nerode-Äquivalenzrelation bezüglich einer Sprache $L \subseteq \Sigma^*$?

◯ $x \, R_L \, y$ genau dann, wenn für alle $w \in \Sigma^*$ gilt

$$xw \in L \iff yw \in L.$$

◯ $x \, R_L \, y$ genau dann, wenn ein $w \in L$ existiert mit

$$xw \in L \iff yw \in L.$$

(8) Sei L eine Sprache, die die Eigenschaft aus dem Pumping-Lemma für reguläre Sprachen erfüllt. Dann ist L regulär.

◯ wahr ◯ falsch ◯ weiß nicht

(9) Reguläre Sprachen sind entscheidbar.

◯ wahr ◯ falsch ◯ weiß nicht

(10) Endliche Sprachen sind kontextfrei.

◯ wahr ◯ falsch ◯ weiß nicht

(11) Sei G eine kontextfreie Grammatik. Dann gibt es einen Kellerautomaten M, der $L(G)$ erkennt.

◯ wahr ◯ falsch ◯ weiß nicht

(12) Es gibt eine nicht-deterministische Turingmaschine M, zu der keine deterministischen Turingmaschine M' mit $T(M) = T(M')$ existiert.

◯ wahr ◯ falsch ◯ weiß nicht

(13) Sei $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ eine beliebige Funktion. Dann ist f berechenbar.

◯ wahr ◯ falsch ◯ weiß nicht

(14) Es ist entscheidbar, ob für ein gegebenes Wort $w \in \Sigma^*$ und eine kontextfreie Grammatik G, $w \in L(G)$ gilt.

◯ wahr ◯ falsch ◯ weiß nicht

(15) Die Klasse der kontextfreien Sprachen ist unter Komplement abgeschlossen.

◯ wahr ◯ falsch ◯ weiß nicht

(16) Seien f, g berechenbar. Dann ist $f \circ g$ berechenbar.

◯ wahr ◯ falsch ◯ weiß nicht

(17) Das folgende Loop-Programm terminiert nicht.

$$x_1 := 5;\ \textsc{Loop}\ x_1\ \textsc{Do}\ x_1 := x_1 + 1;\ \textsc{End}$$

◯ wahr ◯ falsch ◯ weiß nicht

(18) Eine Sprache ist genau dann entscheidbar, wenn sie semi-entscheidbar ist und das Komplement semi-entscheidbar ist.

◯ wahr ◯ falsch ◯ weiß nicht

(19) Das spezielle Halteproblem ist semi-entscheidbar.

◯ wahr ◯ falsch ◯ weiß nicht

(20) Die Menge der μ-rekursiven Funktionen ist gleich der Menge der Turing-berechenbaren Funktionen.

◯ wahr ◯ falsch ◯ weiß nicht

Aufgabe 2. (9 Punkte) Sei $\Sigma = \{0, 1\}$. Geben Sie für jede der folgenden Sprachen einen endlichen Automaten und einen regulären Ausdruck an.

(a) $L_a = \{a_1 \cdots a_n \in \Sigma^* \mid \text{es existiert höchstens ein } i \text{ mit } a_i = 1\}$

(b) $L_b = \{a_1 \cdots a_n \in \Sigma^+ \mid a_1 \neq a_n\}$

(c) $L_c = L_a \cap L_b$

Aufgabe 3. (7 Punkte) Gegeben sei der NFA $M = (\{1,2,3\}, \{a,b\}, \delta, \{1,2\}, \{3\})$, wobei δ gegeben ist durch:

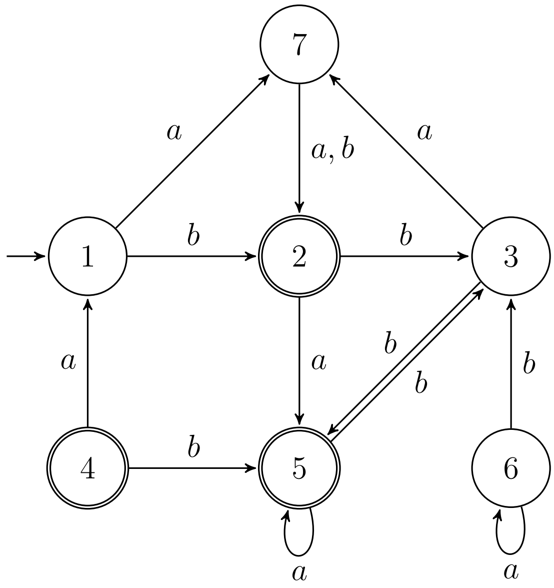
δ	a	b
1	$\{1,2\}$	$\{1\}$
2	$\emptyset$	$\{3\}$
3	$\{3\}$	$\{3\}$

(a) Zeichnen Sie das zu M gehörige Automatendiagramm.

(b) Geben Sie mittels Potenzmengenkonstruktion einen zu M äquivalenten DFA an. Es genügt den vom Startzustand erreichbaren Teil anzugeben.

(c) Geben Sie einen regulären Ausdrück für $T(M)$ an.

Aufgabe 4. (6 Punkte) Minimieren Sie den folgenden DFA mit dem Algorithmus aus der Vorlesung. Geben Sie an, welche Zustandspaare in welcher Reihenfolge markiert werden.



Aufgabe 5. (6 Punkte) Zeigen Sie, dass die folgende Sprache L über $\Sigma = \{a, b\}$ nicht regulär ist:

$$L = \{a^m b^n \mid 0 \leq m < n\}$$

Aufgabe 6. (6 Punkte) Formen Sie die Grammatik $G = (\{S, A\}, \{a, b\}, S, P)$ mit

$$
\begin{aligned}
P : S &\to aaS \mid aSSb \mid A \mid b \\
A &\to Aa \mid a
\end{aligned}
$$

in Chomsky-Normalform um.

Aufgabe 7. (6 Punkte) Gegeben sei die Grammatik $G = (\{S, A, B, C\}, \{a, b\}, S, P)$ mit

$$\begin{aligned} P : S &\to AB \mid AC \\ C &\to SB \\ A &\to a \\ B &\to b \end{aligned}$$

(a) Testen Sie mit dem CYK-Algorithmus, ob das Wort $aabb$ in $L(G)$ enthalten ist.

(b) Welche Sprache L wird durch G erzeugt?

Aufgabe 8. (8 Punkte) Gegeben sei die Sprache $L = \{a^n b^{3n} \mid n \geq 0\}$.

(a) Geben Sie eine Grammatik G mit $L(G) = L$ an.

(b) Konstruieren Sie einen Kellerautomaten M mit $N(M) = L$.

Aufgabe 9. (4 Punkte) Sei $\Sigma = \{a, b\}$ und $M = (\{z_0, z_1, z_2\}, \Sigma, \Sigma \cup \{\Box\}, \delta, z_0, \Box, \{z_2\})$ die nicht-deterministische Turing-Maschine mit

δ	a	b
z_0	$\{(z_1, a, R)\}$	$\emptyset$
z_1	$\emptyset$	$\{(z_2, b, N)\}$

(a) Akzeptiert M das Wort $w_1 = abba$? ○ ja ○ nein

(b) Akzeptiert M das Wort $w_2 = baa$? ○ ja ○ nein

(c) Welche Sprache akzeptiert M?

Aufgabe 10. (4 Punkte) Geben Sie ein LOOP-Programm an, welches die Funktion

$$f(x,y) = \begin{cases} x^2, & \text{für } x > y, \\ y^2, & \text{für } x \leq y \end{cases}$$

berechnet.

Aufgabe 11. (5 Punkte) Geben Sie ein WHILE-Programm an, welches die partielle Funktion

$$f(x,y) = \begin{cases} 2^x, & \text{für } y = 0, \\ \text{undefiniert}, & \text{sonst} \end{cases}$$

berechnet.

Aufgabe 12. (6 Punkte) Zeigen Sie, dass die Funktionen $f : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ und $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ primitiv-rekursiv sind.

(a) $f(x, y) = 3^x + y$

(b) $g(x) = \sum_{i=1}^{x} i^2$

Aufgabe 13. (4 Punkte) Geben Sie an, welche Funktionen von μf und μg berechnet werden.

(a) $f(n, x) = x - 3^n$

(b) $g(n, x, y) = x \cdot y^2 \cdot n$

Aufgabe 14. (3 Punkte) Zeigen Sie, dass die Funktion $f(x) = \lceil \sqrt[3]{x} \rceil$ μ-rekursiv ist.

Aufgabe 15. (6 Punkte) Gegeben sei die Funktion $f : \{0,1\}^+ \to \{0,1\}^*$ mit

$$f(a_1 \cdots a_{n-1} a_n) = a_1 \cdots a_{n-1}.$$

Die Funktion f löscht also bei Eingabe eines Wortes $w \in \{0,1\}^+$ das letzte Zeichen (z.B. $f(10011) = 1001$). Geben Sie eine Turing-Maschine an, die f berechnet. Bei Eingabe $w = \varepsilon$ kann sich die Turing-Maschine beliebig verhalten.

Aufgabe 16. (5 Punkte (Bonus)) Bekanntermaßen ist die Sprache

$$L = \{a^{2n} \mid n \in \mathbb{N}\}$$

regulär. Im Folgenden wird versucht zu beweisen, dass sie dies nicht ist. Finden Sie den Fehler.

Beweis: Sei $n \in \mathbb{N}$ beliebig. Wähle $x = a^{2n}$. Dann ist $x \in L$ und $|x| = 2n \geq n$. Betrachten wir alle Zerlegungen $x = uvw$ mit $|uv| \leq n$ und $v \neq \varepsilon$, so ist $uv = a^l$ für ein l mit $1 \leq l \leq n$ und damit $v = a^k$ mit $1 \leq k \leq l$. Damit ist $uv^2w = a^{2n+k} \neq a^{2n}$ und somit $uv^2w \notin L$. Somit ist L nach dem Pumping-Lemma für reguläre Sprachen nicht regulär.