Universität Siegen
Lehrstuhl Theoretische Informatik
Markus Lohrey

Übungsblatt 2

Aufgabe 1. Wiederholen Sie die Definitionen der Seiten 28 bis 32 des Skripts.

- Zeigen Sie, dass $(Rel(X), \circ, id_X)$ für beliebige Mengen X ein Monoid ist.
- Für welche Relationen $R \in Rel(X)$ existiert eine Relation R' mit $R \circ R' = id_X$?
- Die binäre Relation $\equiv$ auf der Menge X sei definiert durch $x \equiv y$ genau dann, wenn $(x, y) \in R^*$ und $(y, x) \in R^*$. Zeigen Sie, dass $\equiv$ eine Äquivalenzrelation ist.
- Auf der Menge $Y = \{[x]_\equiv \mid x \in X\}$ aller Äquivalenzklassen bezüglich $\equiv$ sei die binäre Relation $\leq$ definiert durch $[x]_\equiv \leq [y]_\equiv$ genau dann, wenn $(x, y) \in R^*$. Zeigen Sie, dass $\leq$ wohldefiniert und eine partielle Ordnung ist.

Aufgabe 2. Sei $(X, \leq)$ eine partielle Ordnung. Wir bezeichnen die Menge aller endlichen Folgen von Elementen aus X mit X^* (z. B. ist $(1, 4, 2) \in \mathbb{N}^*$). Wir definieren eine Ordnung $\leq_{ll}$ auf X^* (ll bedeutet längenlexikographisch) wie folgt: Seien $\overline{x} = (x_1, \ldots, x_n), \overline{y} = (y_1, \ldots, y_m) \in X^*$. Es gilt $\overline{x} \leq_{ll} \overline{y}$, wenn einer der folgenden drei Fälle eintritt:

- $\overline{x} = \overline{y}$,
- $n < m$,
- $n = m$ und es gibt ein $i \leq m$ so, dass $x_i < y_i$ und $(x_1, \ldots, x_{i-1}) = (y_1, \ldots, y_{i-1})$.

Zeigen Sie, dass $\leq_{ll}$ wohlfundiert ist, falls $\leq$ wohlfundiert ist.