Universität Siegen
Lehrstuhl Theoretische Informatik
Markus Lohrey

Übungsblatt 5

Aufgabe 1. Beweisen Sie die Behauptung aus der Vorlesung, dass die Teiltermrelation eine wohlfundierte partielle Ordnung ist.

Aufgabe 2. Eine rekursive Funktion $f : M^n \to M (n \geq 1)$ kann mit Hilfe eines Regelsystems R über dem Universum $M^n \times M$ wie folgt definiert werden:

$$f(x_1, \ldots, x_n) = y \Leftrightarrow ((x_1, \ldots, x_n), y) \in I_R$$

Das schnelle Potenzieren entsteht aus folgender Gleichung

$$x^n = x^{2*(n \textbf{ div } 2)+(n \textbf{ mod } 2)} = \left(x^2\right)^{(n \textbf{ div } 2)} * x^{n \textbf{ mod } 2}$$

Wir definieren die rekursive Funktion $pow : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ mit einem Regelsystem:

$$\frac{}{((x,0),1)}$$

$$\frac{((x^2, n \textbf{ div } 2), v_1) \quad ((x, n \textbf{ mod } 2), v_2)}{((x,n), v_1 * v_2)} \qquad \text{für } n > 0$$

- Zeigen Sie durch Regelinduktion, dass falls $pow(x, n) = v$, dann ist $x^n = v$.
- Zu welchen Paaren (x, n) gibt es ein v mit $pow(x, n) = v$?
- Wie könnte man die Regeln abändern, sodass zu allen (x, n) ein v mit $pow(x, n) = v$ existiert?
- Zeigen Sie mit einem geeigneten Induktionsverfahren, dass mit Ihren abgeänderten Regeln tatsächlich zu jedem (x, n) ein v mit $pow(x, n) = v$ existiert.

Aufgabe 3. Die Ackermannfunktion $A : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ sei gegeben durch

$$A(x,y) = \begin{cases} y+1 & \text{falls } x = 0 \\ A(x-1, 1) & \text{falls } x \neq 0 \text{ und } y = 0 \\ A(x-1, A(x, y-1)) & \text{falls } x \neq 0 \text{ und } y \neq 0 \end{cases}$$

Verwenden Sie noethersche Induktion, um zu zeigen, dass A total ist.