Universität Siegen
Lehrstuhl Theoretische Informatik
Markus Lohrey

Übungsblatt 6

Aufgabe 1. Seien $(X, \leq)$, $(Y, \leq)$ partielle Ordnungen, $D \subseteq X$ eine gerichtete Menge und $f : X \to Y$ eine totale, monotone Funktion. Zeigen Sie, dass $f(D) = \{y \in Y \mid \exists\, x \in D : y = f(x)\}$ eine gerichtete Menge ist.

Aufgabe 2. Seien $(D, \sqsubseteq_D)$ und $(E, \sqsubseteq_E)$ CPOs. Zeigen Sie, dass das Produkt $(D \times E, \sqsubseteq)$ ebenfalls eine CPO ist, wenn $\sqsubseteq$ auf $D \times E$ komponentenweise definiert ist, d.h.

$$(d, e) \sqsubseteq (d', e') \;\Leftrightarrow\; d \sqsubseteq_D d' \,\wedge\, e \sqsubseteq_E e'$$

Aufgabe 3. *Bool* mit *false* $<$ *true* ist eine CPO. Für jede Teilmenge S einer CPO D sei die charakteristische Funktion $c_S : D \to \mathit{Bool}$ definiert als:

$$c_S(d) = \mathit{true} \Leftrightarrow d \in S$$

Sei nun D die CPO $((\mathbb{N} \hookrightarrow \mathbb{N}), \subseteq)$ der partiellen Funktionen von $\mathbb{N}$ nach $\mathbb{N}$. Für welche der folgenden Mengen $S_i \subseteq D$ ist c_{S_i} stetig?

- $S_1 = \{f : \mathbb{N} \hookrightarrow \mathbb{N} \mid f \text{ ist total}\}$
- $S_2 = \{f : \mathbb{N} \hookrightarrow \mathbb{N} \mid \mathit{dom}(f) \neq \varnothing\}$
- $S_3 = \{f : \mathbb{N} \hookrightarrow \mathbb{N} \mid 0 \in \mathit{dom}(f)\}$
- $S_4 = \{f : \mathbb{N} \hookrightarrow \mathbb{N} \mid |\mathit{dom}(f)| > 10\}$
- $S_5 = \{f : \mathbb{N} \hookrightarrow \mathbb{N} \mid \mathit{dom}(f) \text{ unendlich}\}$
- $S_6 = \{f : \mathbb{N} \hookrightarrow \mathbb{N} \mid (0, 1) \in f\}$
- $S_7 = \{f : \mathbb{N} \hookrightarrow \mathbb{N} \mid f \not\subseteq \mathit{succ}\}$
- $S_8 = \{\mathit{succ}\}$

Aufgabe 4. Geben Sie eine CPO D mit kleinstem Element $\perp$ und eine *monotone* Funktion $f : D \to D$ so an, dass das Element $\bigsqcup_{n \in \mathbb{N}} f^n \perp$ *kein* Fixpunkt von f ist.