

Übungsblatt 7

Aufgabe 1. Seien X und Y Mengen. Zeigen Sie, dass die drei auf Seite 68 des Skripts genannten Mengen von Funktionen bijektiv aufeinander abgebildet werden können:

- $X \rightarrow_p Y$ (die partiellen Funktionen von X nach Y),
- $X \rightarrow Y_\perp$ (die Funktionen von X nach Y_\perp) und
- $X_\perp \rightarrow Y_\perp$ (die strikten (d.h. $\perp_X \rightarrow \perp_Y$) Funktionen von X_\perp nach Y_\perp).

Zeigen Sie auch, dass $f : X_\perp \rightarrow Y_\perp$ bereits stetig ist, wenn f strikt ist.

Aufgabe 2. Sei X eine endliche CPO. Zeigen Sie:

- Für jede gerichtete Teilmenge $\Delta \subseteq X$ ($\Delta \neq \emptyset$) gilt: $\bigsqcup \Delta$ ist größtes Element von Δ .
- Sei Y eine CPO. Jede monotone Funktion $f : X \rightarrow Y$ ist bereits stetig.

Aufgabe 3. Seien I, J Indexmengen, X eine CPO und $d_{i,j} \in X$ für alle $i \in I, j \in J$. Zeigen Sie:

- Wenn für jedes $i \in I$ das Zeilensupremum $l_i = \bigsqcup_{j \in J} d_{i,j}$ und außerdem das Supremum $l = \bigsqcup_{i \in I} l_i$ aller Zeilensuprema existiert, dann gilt auch $l = \bigsqcup_{i \in I, j \in J} d_{i,j}$.
- Wenn für jedes $j \in J$ das Spaltensupremum $l^j = \bigsqcup_{i \in I} d_{i,j}$ und außerdem das Supremum $l' = \bigsqcup_{j \in J} l^j$ aller Spaltensuprema existiert, dann gilt auch $l' = \bigsqcup_{i \in I, j \in J} d_{i,j}$.

Aufgabe 4. Seien $\mathbf{unit} = \{()\}$ und $\mathbf{bool} = \{true, false\}$. Bestimmen Sie für jede der folgenden CPOs die Anzahl der Elemente und zeichnen Sie das Hasse-Diagramm.

- $[\mathbf{unit}_\perp \rightarrow \mathbf{unit}_\perp]$
- $[\mathbf{bool}_\perp \rightarrow \mathbf{unit}_\perp]$
- $[\mathbf{unit}_\perp \rightarrow \mathbf{bool}_\perp]$
- $[[\mathbf{unit}_\perp \rightarrow \mathbf{unit}_\perp] \rightarrow \mathbf{unit}_\perp]$
- $[\mathbf{unit}_\perp \rightarrow [\mathbf{unit}_\perp \rightarrow \mathbf{unit}_\perp]]$