

## Übungsblatt 7

**Aufgabe 1.** Seien  $X$  und  $Y$  Mengen. Zeigen Sie, dass die drei auf Seite 68 des Skripts genannten Mengen von Funktionen bijektiv aufeinander abgebildet werden können:

- $X \rightarrow_p Y$  (die partiellen Funktionen von  $X$  nach  $Y$ ),
- $X \rightarrow Y_\perp$  (die Funktionen von  $X$  nach  $Y_\perp$ ) und
- $X_\perp \rightarrow Y_\perp$  (die strikten (d.h.  $\perp_X \rightarrow \perp_Y$ ) Funktionen von  $X_\perp$  nach  $Y_\perp$ ).

Zeigen Sie auch, dass  $f : X_\perp \rightarrow Y_\perp$  bereits stetig ist, wenn  $f$  strikt ist.

**Aufgabe 2.** Sei  $X$  eine endliche CPO. Zeigen Sie:

- Für jede gerichtete Teilmenge  $\Delta \subseteq X$  ( $\Delta \neq \emptyset$ ) gilt:  $\bigsqcup \Delta$  ist größtes Element von  $\Delta$ .
- Sei  $Y$  eine CPO. Jede monotone Funktion  $f : X \rightarrow Y$  ist bereits stetig.

**Aufgabe 3.** Seien  $I, J$  Indexmengen,  $X$  eine CPO und  $d_{i,j} \in X$  für alle  $i \in I, j \in J$ . Zeigen Sie:

- Wenn für jedes  $i \in I$  das Zeilensupremum  $l_i = \bigsqcup_{j \in J} d_{i,j}$  und außerdem das Supremum  $l = \bigsqcup_{i \in I} l_i$  aller Zeilensuprema existiert, dann gilt auch  $l = \bigsqcup_{i \in I, j \in J} d_{i,j}$ .
- Wenn für jedes  $j \in J$  das Spaltensupremum  $l^j = \bigsqcup_{i \in I} d_{i,j}$  und außerdem das Supremum  $l' = \bigsqcup_{j \in J} l^j$  aller Spaltensuprema existiert, dann gilt auch  $l' = \bigsqcup_{i \in I, j \in J} d_{i,j}$ .

**Aufgabe 4.** Seien  $\mathbf{unit} = \{()\}$  und  $\mathbf{bool} = \{true, false\}$ . Bestimmen Sie für jede der folgenden CPOs die Anzahl der Elemente und zeichnen Sie das Hasse-Diagramm.

- $[\mathbf{unit}_\perp \rightarrow \mathbf{unit}_\perp]$
- $[\mathbf{bool}_\perp \rightarrow \mathbf{unit}_\perp]$
- $[\mathbf{unit}_\perp \rightarrow \mathbf{bool}_\perp]$
- $[[\mathbf{unit}_\perp \rightarrow \mathbf{unit}_\perp] \rightarrow \mathbf{unit}_\perp]$
- $[\mathbf{unit}_\perp \rightarrow [\mathbf{unit}_\perp \rightarrow \mathbf{unit}_\perp]]$