Universität Siegen
Lehrstuhl Theoretische Informatik
Markus Lohrey

Übungsblatt 10

Aufgabe 1 Sei *tutwas* $\in$ **Cmd** mit **Loc** $= \{X, Y, Z\}$ das bereits bekannte Programm:

$$
\begin{array}{lll}
\mathit{tutwas} & \equiv & X := 1; \\
 & & Z := X; \\
 & & \textbf{while } Z > 0 \textbf{ do} \\
 & & \quad Y := Y + X; \\
 & & \quad Z := Z - 1 \\
 & & \textbf{od}
\end{array}
$$

Machen Sie sich zunächst intuitiv klar, welche Funktion die Semantik von *tutwas*, also $C[\![\mathit{tutwas}]\!]\sigma$, ist. Zeigen Sie dann mit der denotationellen Semantik, dass ihre Vermutung korrekt ist.

Aufgabe 2

1. Geben Sie ein $b \in$ **Bexp** und ein $c \in$ **Cmd** so an, dass 2015 die kleinste natürliche Zahl i ist, für die $\Gamma^i_{b,c}(\bot) = \Gamma^{i+1}_{b,c}(\bot)$ gilt.
2. Geben Sie ein $b \in$ **Bexp** und ein $c \in$ **Cmd** so an, dass das Programm **while** b **do** c **od** auf jeder Eingabe terminiert und für alle $i \in \mathbb{N}$ die Beziehung $\Gamma^i_{b,c}(\bot) \neq \Gamma^{i+1}_{b,c}(\bot)$ gilt.
3. Sei $b \in$ **Bexp** eine Bedingung, $c \in$ **Cmd** ein Programm und $i \in \mathbb{N}$ eine natürliche Zahl. Geben Sie ein Programm $d \in$ **Cmd** so an, dass gilt: $\forall \sigma \in \Sigma : \mathcal{C}[\![d]\!]\sigma = \big(\Gamma^i_{b,c}(\bot)\big)\,\sigma$.

Aufgabe 3 Sei **Loc** $\supseteq \{X, Y, R\}$. Geben Sie $p \in \mathit{Cmd}$ so an, dass p den größten gemeinsamen Teiler zweier natürlicher Zahlen n, m berechnet, d.h. falls $\sigma(X) = n$ und $\sigma(Y) = m$, so ist $(C[\![p]\!](\sigma))(R) = \mathit{gcd}(n, m)$. Sie können folgende Eigenschaften von gcd annehmen:

- Für alle $n \in \mathbb{N}, m \in \mathbb{N}_{>0}$ mit $n \geq m$ gilt $\mathit{gcd}(n, m) = \mathit{gcd}(n - m, m)$.
- Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $\mathit{gcd}(n, 0) = n$.

Beweisen Sie, dass Ihr Algorithmus korrekt ist, d.h.:

- Verwenden Sie die denotationelle Semantik, um zu zeigen, dass falls $C[\![p]\!](\sigma) = \sigma'$, dann gilt $\mathit{gcd}(\sigma(X), \sigma(Y)) = \sigma'(R)$.
- Zeigen Sie mit einem geeigneten Beweisverfahren, dass $C[\![p]\!]$ eine totale Funktion ist.