Universität Siegen
Lehrstuhl Theoretische Informatik
Markus Lohrey

Übungsblatt 3

Aufgabe 1 Geben Sie eine induktive Definition der next-Funktion an.

Lösung
Sei Σ ein Alphabet. Idee: Wir sammeln alle Transitionen bottom-up auf. Bei Konkatenation und Kleene-Stern müssen wir neue Transitionen hinzufügen.

$$\begin{aligned}
\text{next}' : \mathcal{E}_{\Sigma_n} &\to \mathcal{P}(\Sigma_n \times \Sigma_n) \\
\text{next}'(\epsilon) &= \varnothing \\
\text{next}'([i,a]) &= \varnothing \text{ für } [i,a] \in \Sigma_n \\
\text{next}'(\alpha|\beta) &= \text{next}'(\alpha) \cup \text{next}'(\beta) \\
\text{next}'(\alpha \circ \beta) &= \text{next}'(\alpha) \cup \text{next}'(\beta) \cup (\text{last}(\alpha) \times \text{first}(\beta)) \\
\text{next}'(\alpha^*) &= \text{next}'(\alpha) \cup (\text{last}(\alpha) \times \text{first}(\alpha))
\end{aligned}$$

Aufgabe 2 Seien $e_1, e_2 \in \mathcal{E}_{\{a,b\}}$ gegeben durch

- $e_1 = bba$
- $e_2 = (a^*b)|a$

Führen Sie das Berry-Sethi-Verfahren für e_1 und e_2 durch.

Lösung

- Zunächst wird e_1 durchnummeriert.

$$e := \text{num}(e_1) = ([1,b] \circ [2,b]) \circ [3,a]$$

  Nun bestimmen wir empty(e), first(e) und last(e).

$$\begin{aligned}
\text{empty}(e) &= \text{empty}(([1,b] \circ [2,b]) \circ [3,a]) \\
&= \text{empty}([1,b] \circ [2,b]) \wedge \text{empty}([3,a]) \\
&= \text{empty}([1,b]) \wedge \text{empty}([2,b]) \wedge f \\
&= f
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\mathrm{first}(e) &= \mathrm{first}(([1,b] \circ [2,b]) \circ [3,a]) \\
&= \mathrm{first}([1,b] \circ [2,b]) \\
&= \mathrm{first}([1,b]) \\
&= \{[1,b]\}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathrm{last}(e) &= \mathrm{last}(([1,b] \circ [2,b]) \circ [3,a]) \\
&= \mathrm{last}([3,a]) \\
&= \{[3,a]\}
\end{aligned}
$$

Da next der Blätter in e top-down bestimmt wird, stellen wir die Berechnung als Baum dar.

- $\mathrm{next}_e(e) = \mathrm{next}_e(([1,b] \circ [2,b]) \circ [3,a]) = \varnothing$
  - $\mathrm{next}_e(([1,b] \circ [2,b])) = \mathrm{first}([3,a]) = \{[3,a]\}$
    - $\mathrm{next}_e([1,b]) = \mathrm{first}([2,b]) = \{[2,b]\}$
    - $\mathrm{next}_e([2,b]) = \mathrm{next}_e(([1,b] \circ [2,b])) = \{[3,a]\}$
  - $\mathrm{next}_e([3,a]) = \mathrm{next}_e(e) = \varnothing$

Insgesamt erhalten wir:

$$A = (Q, \Sigma, \Delta, S, F)$$

$$
\begin{aligned}
Q &= \{1, \ldots, \mathrm{leaves}(e)\} \cup \{q_0\} = \{1, 2, 3, q_0\} \\
S &= \{q_0\} \\
F &= \{i \mid \exists x.[i,x] \in \mathrm{last}(e)\} = \{3\} \\
\Delta &= \{(q_0, x, i) \mid [i,x] \in \mathrm{first}(e)\} \\
&\quad \cup \{(i, x, j) \mid \exists y.[j,x] \in \mathrm{next}_e([i,y])\} \\
&\quad = \{(q_0, b, 1)\} \cup \{(1, b, 2), (2, a, 3)\}
\end{aligned}
$$

- Nummeriere zunächst e_2 durch:

$$e := \mathrm{num}(e_2) = ([1,a]^* \circ [2,b])|[3,a]$$

Bestimme empty, first, last und next.

$$\begin{aligned}
\text{empty}(e) &= \text{empty}(([1,a]^* \circ [2,b])|[3,a]) \\
&= \text{empty}([1,a]^* \circ [2,b]) \vee \text{empty}([3,a]) \\
&= (\text{empty}([1,a]^*) \wedge \text{empty}([2,b])) \vee f \\
&= (t \wedge f) \vee f \\
&= f
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{first}(e) &= \text{first}(([1,a]^* \circ [2,b])|[3,a]) \\
&= \text{first}([1,a]^* \circ [2,b]) \cup \text{first}([3,a]) \\
&= (\text{first}([1,a]^*) \cup \text{first}([2,b])) \cup \text{first}([3,a]) \\
&= \text{first}([1,a]) \cup \text{first}([2,b]) \cup \text{first}([3,a]) \\
&= \{[1,a],[2,b],[3,a]\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{last}(e) &= \text{last}(([1,a]^* \circ [2,b])|[3,a]) \\
&= \text{last}([1,a]^* \circ [2,b]) \cup \text{last}([3,a]) \\
&= \text{last}([2,b]) \cup \text{last}([3,a]) \\
&= \{[2,b],[3,a]\}
\end{aligned}$$

$\text{next}_e(e) = \text{next}_e(([1,a]^* \circ [2,b])|[3,a]) = \varnothing$

- $\text{next}_e([1,a]^* \circ [2,b]) = \text{next}_e(e) = \varnothing$
  - $\text{next}_e([1,a]^*) = \text{first}([2,b]) = \{[2,b]\}$
    - $\text{next}_e([1,a]) = \text{first}([1,a]) \cup \text{next}_e([1,a]^*) = \{[1,a],[2,b]\}$
  - $\text{next}_e([2,b]) = \text{next}_e([1,a]^* \circ [2,b]) = \varnothing$
- $\text{next}_e([3,a]) = \text{next}_e(e) = \varnothing$

Der berechnete Automat ist:

$$A = (Q, \Sigma, \Delta, S, F)$$

$$
\begin{aligned}
Q &= \{1, \ldots, \mathrm{leaves}(e)\} \cup \{q_0\} = \{1, 2, 3, q_0\} \\
S &= \{q_0\} \\
F &= \{i \mid \exists x.[i, x] \in \mathrm{last}(e)\} = \{2, 3\} \\
\Delta &= \{(q_0, x, i) \mid [i, x] \in \mathrm{first}(e)\} \\
&\quad \cup \{(i, x, j) \mid \exists y.[j, x] \in \mathrm{next}_e([i, y])\} \\
&\quad = \{(q_0, a, 1), (q_0, a, 3)\} \cup \{(1, a, 1), (1, b, 2)\}
\end{aligned}
$$

Aufgabe 3 Das Berry-Sethi-Verfahren konstruiert einen NDEA, der einen einzigen Startzustand besitzt. Wandeln Sie das Verfahren so um, dass der NDEA stattdessen einen einzigen Endzustand besitzt. Verwenden Sie hierzu die bereits bekannten Funktionen $\mathrm{empty}, \mathrm{first}, \mathrm{last}$ und next.

Lösung
Sei $r \in \mathcal{E}_\Sigma$ und $e = \mathrm{num}(r)$ die durchnummerierte Version von r. Wir definieren den Automat zu e wie folgt:

$$A = (Q, \Sigma, \Delta, S, F)$$

$$
\begin{aligned}
Q &= \{1, \ldots, \mathrm{leaves}(e)\} \cup \{\#\} \\
S &= \{i \mid \exists a.[i, a] \in \mathrm{first}(e)\} \\
F &= \{\#\} \\
\Delta &= \{(i, a, \#) \mid [i, a] \in \mathrm{last}(e)\} \\
&\quad \cup \{(i, a, j) \mid \exists b.[j, b] \in \mathrm{next}_e([i, a])\}
\end{aligned}
$$

Aufgabe 4 Sei $\Sigma = \{a, b\}$, $n \in \mathbb{N}$ und $A_n = (\{s, q_0, \ldots, q_n\}, \Sigma, \Delta, \{s\}, \{q_n\})$ ein NDEA mit:

$$
\begin{aligned}
\Delta &= \{(s, x, s) \mid x \in \Sigma\} \\
&\quad \cup \{(s, a, q_0)\} \\
&\quad \cup \{(q_i, x, q_{i+1} \mid x \in \Sigma, 0 \leq i < n\}
\end{aligned}
$$

Sei B_n der DEA, der durch Teilmengenkonstruktion aus A_n entsteht.

- Bestimmen Sie $L(A_n)$.
- Zeichnen Sie B_2.

- Sei Q der Zustand von B_2, der durch Lesen von $w \in \Sigma^*$ mit $|w| \geq 3$ erreicht wird. Welcher Zusammenhang besteht zwischen w und Q?

- Sei $w = aabbaabbaabb$. Konstruieren Sie die Zustände von B_{10} on-demand, die beim Einlesen von w durchlaufen werden. Gilt $w \in L(B_{10})$?

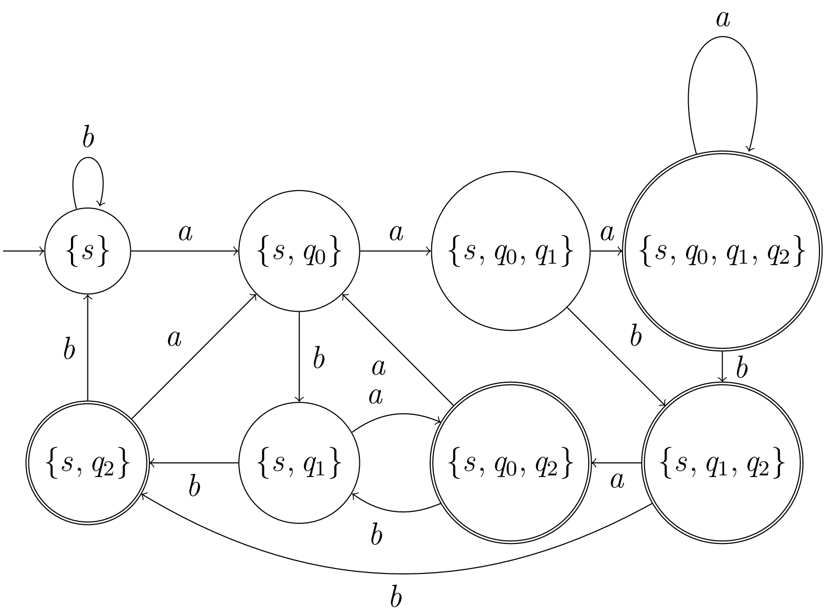
Lösung

- Für $w = a_1 \ldots a_n$ schreiben wir $w[i] = a_i$ $(1 \leq i \leq n)$. $L(A_n)$ enthält genau die Wörter über $\{a, b\}$, die an der $n + 1$ ten Stelle von hinten ein a haben, oder formaler:

$$L(A_n) = \{w \mid w[|w| - n] = a\}$$

  Dies schließt natürlich alle Wörter aus, deren Länge kleiner als $n + 1$ ist.

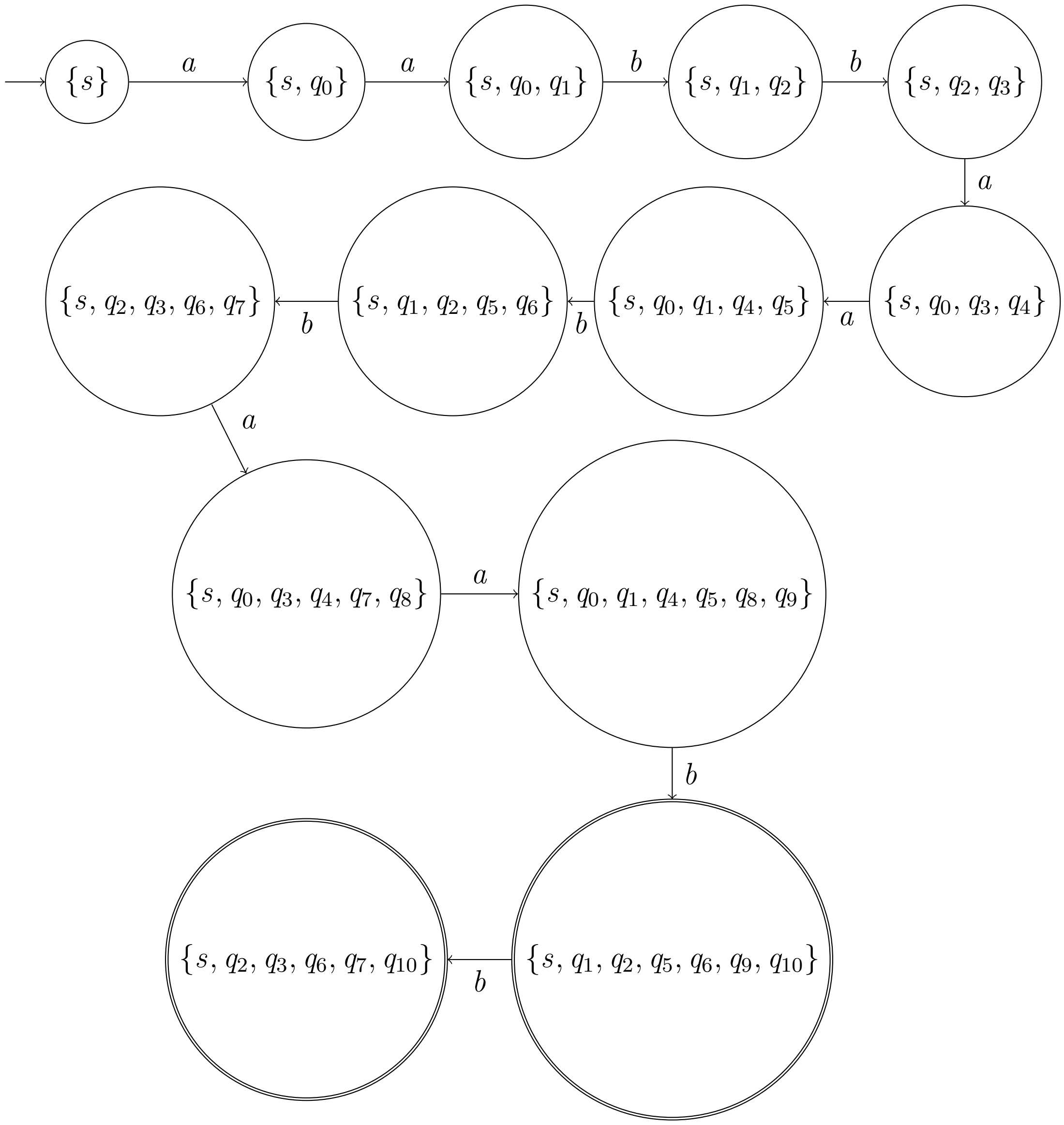
- Zeichnung von B_2:



- Um die Sprache $L(A_2)$ zu erkennen, muss man sich für die letzten drei Zeichen merken, welches von ihnen ein a war. Dafür ist ein Bit-Vektor mit 3 Bits nötig, oder $[q_2, q_1, q_0]$, wobei q_i genau dann wahr ist, wenn das $i + 1$ zuletzt gelesene Zeichen ein a war. Dies drückt der Automat über seine Zustände folgendermaßen aus:

$$w[|w| - i] = a \Leftrightarrow q_i \in Q \text{ für alle } 0 \leq i \leq 2$$

- Die on-demand konstruierten Zustände von B_{10} sind:



w wird akzeptiert, da q_{10} Element des erreichten Zustands ist.