

Übungsblatt 2

Aufgabe 1 Seien $e_1, e_2 \in \mathcal{E}_{\{a,b\}}$ gegeben durch

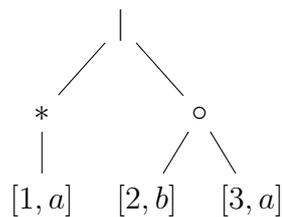
1. $e_1 = a^* | (ba)$ und
2. $e_2 = b^*(a | b)^*$.

Stellen Sie jeweils e_1 und e_2 als Syntaxbaum dar und nummerieren Sie die Blätter durch. Konstruieren Sie anschließend den ε -NFA.

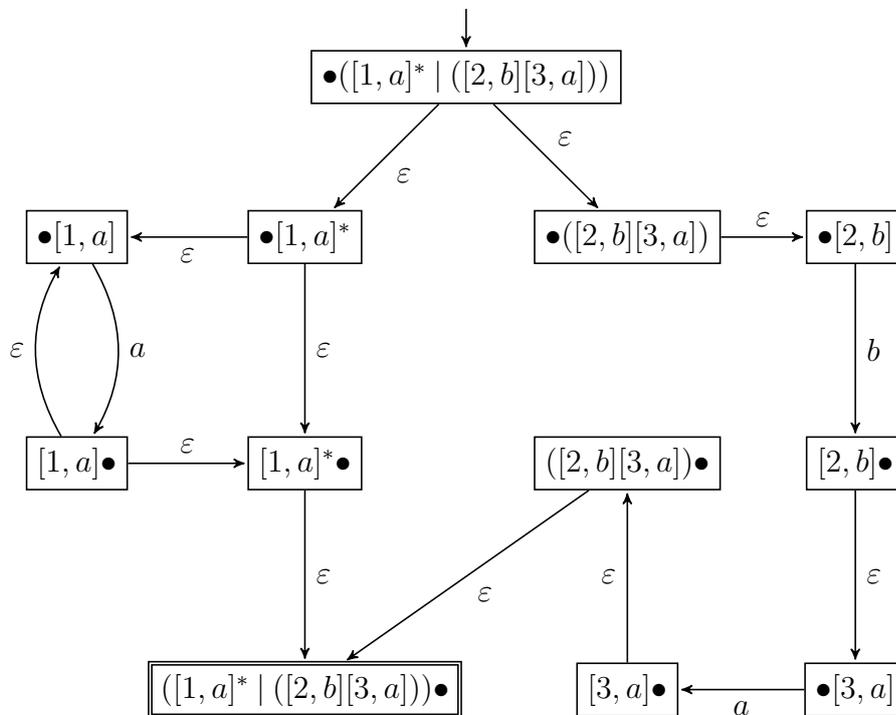
Lösung:

Für ein Blatt mit Terminalsymbol a und Nummer i schreiben wir $[i, a]$. Wir fangen außerdem (traditionell) bei 1 an zu zählen.

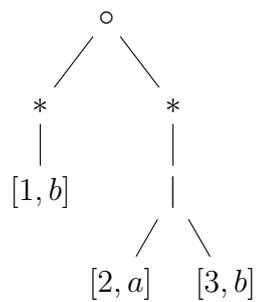
1. e_1 als durchnummerierter Baum:



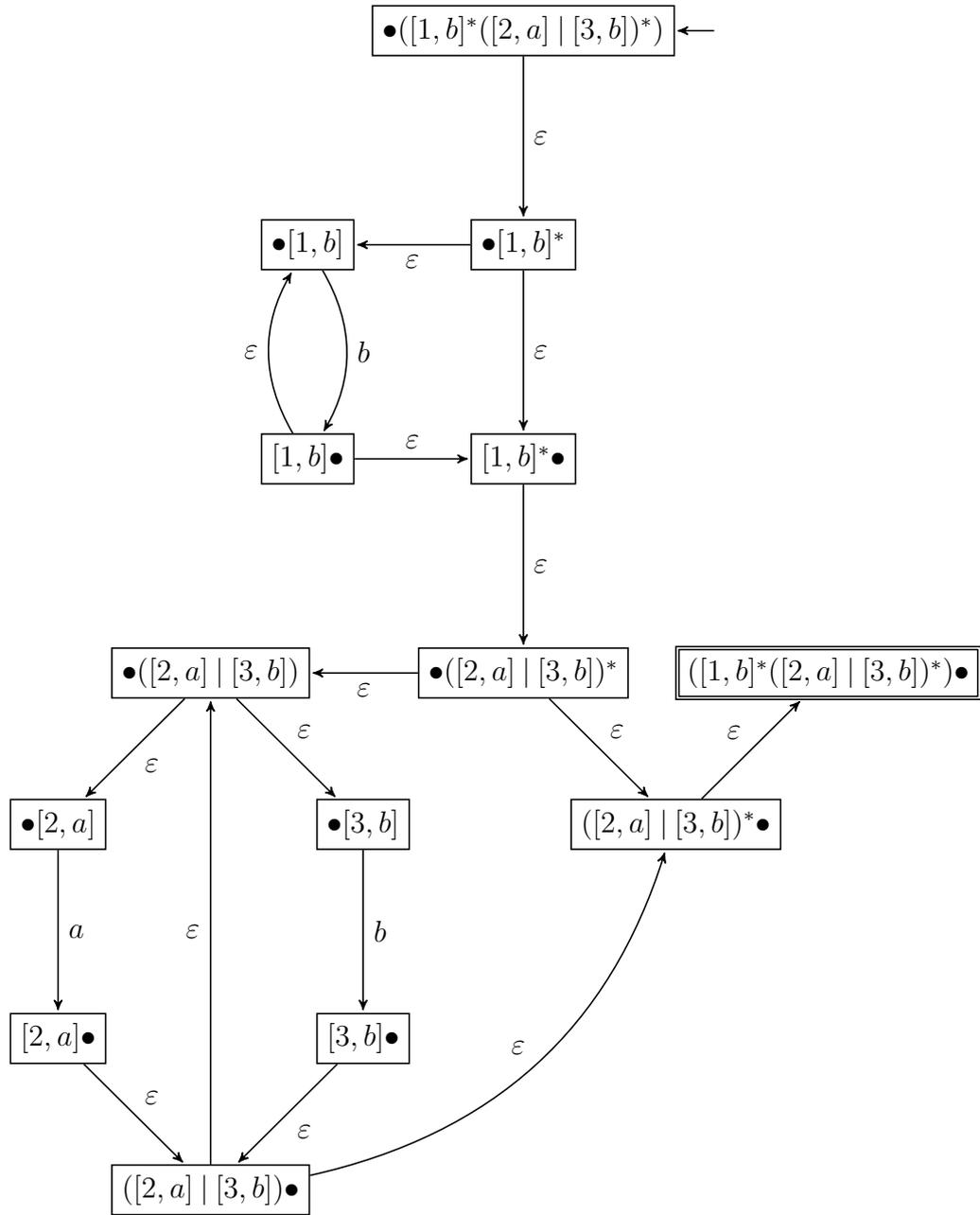
Der ε -NFA dazu ist dann:



2. e_2 als durchnummerierter Baum:



Der ϵ -NFA dazu ist dann:



Aufgabe 2 Sei Σ ein (endliches) Alphabet. In dieser Aufgabe soll das Durchnummerieren der Terminalzeichen eines regulären Ausdrucks über Σ formal definiert werden. Ein Computer würde genau mit solchen formalen Definitionen arbeiten.

- (a) Definieren Sie die Funktion $\ell: \mathcal{E}_\Sigma \rightarrow \mathbb{N}$, welche die Terminalzeichen eines regulären Ausdrucks zählt.

Lösung:

Wir definieren ℓ wie folgt:

$$\begin{aligned}\ell(a) &= 1 \text{ für } a \in \Sigma \cup \{\varepsilon\}, \\ \ell(e_1 | e_2) &= \ell(e_1) + \ell(e_2), \\ \ell(e_1 e_2) &= \ell(e_1) + \ell(e_2), \\ \ell(e^*) &= \ell(e).\end{aligned}$$

- (b) Mit $\Sigma_n = \mathbb{N} \times \Sigma$ bezeichnen wir das (unendliche) Alphabet, das aus durchnummerierten Terminalzeichen besteht. Definieren Sie das Durchnummerieren $\text{num}: \mathcal{E}_\Sigma \rightarrow \mathcal{E}_{\Sigma_n}$ eines regulären Ausdrucks. Verwenden Sie hierzu eine Hilfsfunktion $\text{num}': \mathbb{N} \rightarrow (\mathcal{E}_\Sigma \rightarrow \mathcal{E}_{\Sigma_n})$, welche die Startnummerierung als Parameter erhält.

Lösung:

Wir definieren num' wie folgt:

$$\begin{aligned}\text{num}'(i)(a) &= [i, a] \text{ für } a \in \Sigma \cup \{\varepsilon\}, \\ \text{num}'(i)(e_1 | e_2) &= \text{num}'(i)(e_1) | \text{num}'(i + \ell(e_1))(e_2), \\ \text{num}'(i)(e_1 e_2) &= \text{num}'(i)(e_1) \text{num}'(i + \ell(e_1))(e_2), \\ \text{num}'(i)(e^*) &= \text{num}'(i)(e)^*.\end{aligned}$$

Wir definieren dann $\text{num} = \text{num}'(1)$. Somit wäre zum Beispiel $\text{num}(e) = \text{num}'(1)(e)$ für einen beliebigen regulären Ausdruck $e \in \mathcal{E}_\Sigma$.