Universität Siegen
Lehrstuhl Theoretische Informatik
Markus Lohrey

Übungsblatt 3

Aufgabe 1 Sei $e \in \mathcal{E}_\Sigma$. Definieren Sie die Funktionen empty, first, last und next aus dem Berry-Sethi-Verfahren für e^+. Liefern die Funktionen für $\text{num}(e^+)$ und $\text{num}(ee^*)$ (Blatt 2) immer dieselben Ergebnisse?

Lösung:
Die einzelnen Fälle sind:

$$\begin{aligned} \text{empty}(e^+) &= \text{empty}(e) \\ \text{first}(e^+) &= \text{first}(e) \\ \text{last}(e^+) &= \text{last}(e) \\ \text{next}(e) &= \text{next}(e^+) \cup \text{first}(e) \end{aligned}$$

Für $e = a$ erhalten wir z.B. $\text{last}(\text{num}(e)^+) = \text{last}([1,a]^+) = \{[1,a]\}$, aber $\text{last}(\text{num}(ee^*)) = \text{last}([1,a][2,a]^*) = \{[1,a],[2,a]\}$.

Aufgabe 2 Sei $e \in \mathcal{E}_\Sigma$. Zeigen Sie, dass die Funktionen empty, first und last aus dem Berry-Sethi-Verfahren für $\text{num}(e?)$ und $\text{num}(e \mid \varepsilon)$ übereinstimmen. Welchen Zusammenhang erkennen Sie für next?

Lösung:
Die einzelnen Fälle sind:

$$\begin{aligned} \text{empty}(e?) &= t = \text{empty}(e) \vee t = \text{empty}(e) \vee \text{empty}(\varepsilon) = \text{empty}(e \mid \varepsilon) \\ \text{first}(e?) &= \text{first}(e) = \text{first}(e) \cup \emptyset = \text{first}(e) \cup \text{first}(\varepsilon) = \text{first}(e \mid \varepsilon) \\ \text{last}(e?) &= \text{last}(e) = \text{last}(e) \cup \emptyset = \text{last}(e) \cup \text{last}(\varepsilon) = \text{last}(e \mid \varepsilon) \end{aligned}$$

next ordnet bei $e?$ dem Kindknoten e einen Wert zu, bei $e \mid \varepsilon$ ordnet es zusätzlich dem Blattknoten ε einen Wert zu. Dieser spielt aber in der Konstruktion des NFA keine Rolle, da nur Blattknoten mit Terminalzeichen zu den Übergängen beitragen. Außerdem gilt $\text{next}(e?) = \text{next}(e) = \text{next}(e \mid \varepsilon)$.

Aufgabe 3 Führen Sie das Berry-Sethi-Verfahren jeweils für die folgenden Ausdrücke durch:

(a) $e_1 = a \mid a$

Lösung:
Zunächst nummerieren wir e_1 durch. Sei

$$e_1' = \text{num}(e_1) = [1, a] \mid [2, a].$$

Dann berechnen wir für jeden Teilausdruck von e_1 die Werte für empty, first, last und next. Die Werte von first und last hängen von empty ab. Die Werte von next hängen von empty und first ab. Wir beginnen mit empty:

$\text{empty}(e_1') = \text{empty}([1, a]) \vee \text{empty}([2, a]) = f$
- $\text{empty}([1, a]) = f$
- $\text{empty}([2, a]) = f$

Als Nächstes berechnen wir first und last:

$\text{first}(e_1') = \text{first}([1, a]) \cup \text{first}([2, a]) = \{[1, a], [2, a]\}$
- $\text{first}([1, a]) = \{[1, a]\}$
- $\text{first}([2, a]) = \{[2, a]\}$

$\text{last}(e_1') = \text{last}([1, a]) \cup \text{last}([2, a]) = \{[1, a], [2, a]\}$
- $\text{last}([1, a]) = \{[1, a]\}$
- $\text{last}([2, a]) = \{[2, a]\}$

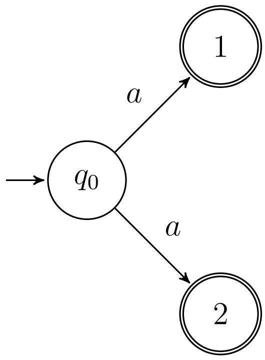
Zuletzt berechnen wir next. Achten Sie darauf, dass man bei next „top-down“ vorgeht, im Gegensatz zu empty, first und last, wo man „bottom-up“ vorgeht. „bottom-up“ bedeutet, dass man einen Knoten beschriften kann, wenn man seine Kindknoten beschriftet hat. „top-down“ bedeutet, dass man einen Knoten beschriften kann, wenn man seinen Elternknoten beschriftet hat. Bei „bottom-up“ fängt man also bei den Blättern an und bei „top-down“ fängt man beim Wurzelknoten an.

$\text{next}(e_1') = \emptyset$
- $\text{next}([1, a]) = \text{next}(e_1') = \emptyset$
- $\text{next}([2, a]) = \text{next}(e_1') = \emptyset$

Nun konstruieren wir den NFA. Dieser ist $(Q, \Sigma, \Delta, I, F)$ mit

$$\begin{aligned}
Q &= \{q_0\} \cup \{1, \dots, \ell(e_1')\} = \{q_0, 1, 2\}, \\
\Sigma &= \{a\}, \\
\Delta &= \{(q_0, x, i) \mid [i, x] \in \mathrm{first}(e_1')\} \\
&\quad \cup \{(i, x, j) \mid \exists y.[j, x] \in \mathrm{next}([i, y])\} \\
&\quad = \{(q_0, x, i) \mid [i, x] \in \mathrm{first}(e_1')\} \\
&\quad = \{(q_0, a, 1), (q_0, a, 2)\} \\
I &= \{q_0\}, \\
F &= \{i \mid \exists x.[i, x] \in \mathrm{last}(e_1')\} \\
&\quad \cup \{q_0 \mid \mathrm{empty}(e_1') = t\} \\
&\quad = \{1, 2\}.
\end{aligned}$$

Grafisch:



(b) $e_2 = a^* \mid (ba)^*$

Lösung:
Wir gehen hier analog zur vorherigen Aufgabe vor. Sei

$$e_2' = \mathrm{num}(e_2) = [1, a]^* \mid ([2, b][3, a])^*.$$

Wir erhalten für empty, first, last und next Folgendes:

$\mathrm{empty}(e_2') = \mathrm{empty}([1,a]^*) \vee \mathrm{empty}(([2,b][3,a])^*) = t$

- $\mathrm{empty}([1,a]^*) = t$
  - $\mathrm{empty}([1,a]) = f$
- $\mathrm{empty}(([2,b][3,a])^*) = t$
  - $\mathrm{empty}([2,b][3,a]) = \mathrm{empty}([2,b]) \wedge \mathrm{empty}([3,a]) = f$
    - $\mathrm{empty}([2,b]) = f$
    - $\mathrm{empty}([3,a]) = f$

$\mathrm{first}(e_2') = \mathrm{first}([1,a]^*) \cup \mathrm{first}(([2,b][3,a])^*) = \{[1,a],[2,b]\}$

- $\mathrm{first}([1,a]^*) = \mathrm{first}([1,a]) = \{[1,a]\}$
  - $\mathrm{first}([1,a]) = \{[1,a]\}$
- $\mathrm{first}(([2,b][3,a])^*) = \mathrm{first}([2,b][3,a]) = \{[2,b]\}$
  - $\mathrm{first}([2,b][3,a]) = \mathrm{first}([2,b]) = \{[2,b]\}$, weil $\mathrm{empty}([2,b]) = f$
    - $\mathrm{first}([2,b]) = \{[2,b]\}$
    - $\mathrm{first}([3,a]) = \{[3,a]\}$

$\mathrm{last}(e_2') = \mathrm{last}([1,a]^*) \cup \mathrm{last}(([2,b][3,a])^*) = \{[1,a],[3,a]\}$

- $\mathrm{last}([1,a]^*) = \mathrm{last}([1,a]) = \{[1,a]\}$
  - $\mathrm{last}([1,a]) = \{[1,a]\}$
- $\mathrm{last}(([2,b][3,a])^*) = \mathrm{last}([2,b][3,a]) = \{[3,a]\}$
  - $\mathrm{last}([2,b][3,a]) = \mathrm{last}([3,a]) = \{[3,a]\}$, weil $\mathrm{empty}([3,a]) = f$
    - $\mathrm{last}([2,b]) = \{[2,b]\}$
    - $\mathrm{last}([3,a]) = \{[3,a]\}$

$\text{next}(e_2') = \emptyset$

- $\text{next}([1,a]^*) = \text{next}(e_2') = \emptyset$
  - $\text{next}([1,a]) = \text{next}([1,a]^*) \cup \text{first}([1,a]) = \{[1,a]\}$
- $\text{next}(([2,b][3,a])^*) = \text{next}(e_2') = \emptyset$
  - $\text{next}([2,b][3,a]) = \text{next}(([2,b][3,a])^*) \cup \text{first}([2,b][3,a]) = \{[2,b]\}$
    - $\text{next}([2,b]) = \text{first}([3,a]) = \{[3,a]\}$, weil $\text{empty}([3,a]) = f$
    - $\text{next}([3,a]) = \text{next}([2,b][3,a]) = \{[2,b]\}$

Damit ergibt sich der NFA $(Q, \Sigma, \Delta, I, F)$ mit

$$
\begin{aligned}
Q &= \{q_0, 1, 2, 3\}\\
\Sigma &= \{a, b\}\\
\Delta &= \{(q_0, a, 1), (q_0, b, 2), (1, a, 1), (2, a, 3), (3, b, 2)\}\\
I &= \{q_0\}\\
F &= \{q_0, 1, 3\}
\end{aligned}
$$

Grafisch: