

Übungsblatt 6

Sei Σ ein Alphabet. Zu $w = a_1 \cdots a_n \in \Sigma^n$, $n \geq 0$, sei $w^R = a_n \cdots a_1$ das umgedrehte Wort. Für $L \subseteq \Sigma^*$ schreiben wir $L^R = \{w^R \in \Sigma^* \mid w \in L\}$.

Aufgabe 1 Betrachten Sie die kontextfreie Grammatik

$$G = (\{S\}, \{a, +, *\}, P, S),$$

wobei P gegeben ist durch

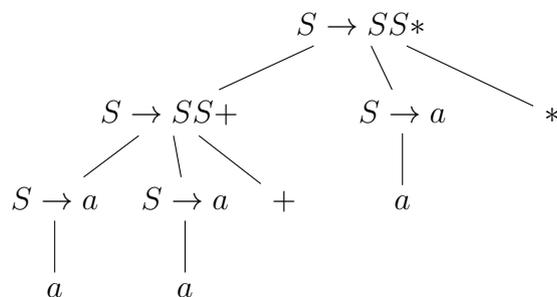
$$S \rightarrow SS+ \mid SS* \mid a.$$

Sei $w = aa + a*$.

(a) Geben Sie zu w alle Syntaxbäume an.

Lösung:

Es gibt nur einen Syntaxbaum zu w :



Bemerkung: Wir schreiben der Deutlichkeit halber die Regeln aus, statt sie zu nummerieren.

(b) Geben Sie alle Links- und Rechtsableitungen an.

Lösung:

Da es nur einen Syntaxbaum gibt, gibt es jeweils genau eine Ableitung.

- Linksableitung: $(S \rightarrow SS*)(S \rightarrow SS+)(S \rightarrow a)(S \rightarrow a)(S \rightarrow a)$
- Rechtsableitung: $(S \rightarrow SS*)(S \rightarrow a)(S \rightarrow SS+)(S \rightarrow a)(S \rightarrow a)$

Bemerkung: Wir schreiben wieder die Regeln aus und fügen Klammern für die Lesbarkeit ein.

Aufgabe 2 Geben Sie kontextfreie Grammatiken zu folgenden Sprachen an:

(a) $L_1 = \{w c w^R \mid w \in \{a, b\}^*\}$

Lösung:

$(\{S\}, \{a, b, c\}, P, S)$, wobei P gegeben ist durch $S \rightarrow c \mid aSa \mid bSb$.

(b) $L_2 = \{w \mid w \in \{a, b\}^*, w = w^R\}$

Lösung:

$(\{S\}, \{a, b\}, P, S)$, wobei P gegeben ist durch $S \rightarrow \varepsilon \mid a \mid b \mid aSa \mid bSb$.

(c) $L_3 = \{a^m b^{2m} \mid m \in \mathbb{N}\}$

Lösung:

$(\{S\}, \{a, b\}, P, S)$, wobei P gegeben ist durch $S \rightarrow \varepsilon \mid aSbb$.

(d) $L_4 = \{a^m b^{m+n} c^n \mid m, n \in \mathbb{N}\}$

Lösung:

$(\{S, L, R\}, \{a, b, c\}, P, S)$, wobei P gegeben ist durch

$$\begin{aligned} S &\rightarrow LR \\ L &\rightarrow \varepsilon \mid aLb \\ R &\rightarrow \varepsilon \mid bRc. \end{aligned}$$

(e) $L_5 = \{a^i b^j c^k \mid i, j, k \in \mathbb{N}, i = j \vee j = k\}$

Lösung:

$(\{S, I, K, L, R\}, \{a, b, c\}, P, S)$, wobei P gegeben ist durch

$$\begin{aligned} S &\rightarrow I \mid K \\ I &\rightarrow Ic \mid L \\ L &\rightarrow \varepsilon \mid aLb \\ K &\rightarrow aK \mid R \\ R &\rightarrow \varepsilon \mid bRc. \end{aligned}$$

Die Sprache kann man auffassen als

$$L_5 = \{a^i b^i c^k \mid i, k \in \mathbb{N}\} \cup \{a^i b^k c^k \mid i, k \in \mathbb{N}\}.$$

Wir raten ganz zu Anfang, ob wir im linken oder rechten Teil sind.

Bemerkung: Die beiden Mengen haben einen nicht leeren Schnitt (nämlich $\{a^i b^i c^i \mid i \in \mathbb{N}\}$). Das heißt, für solche Wörter hat unsere Grammatik zwei Ableitungen. Es ist *nicht* möglich, eine Grammatik für L_5 anzugeben, bei der alle Wörter nur eine Ableitung haben.

Aufgabe 3 Seien $L_1 \subseteq \Sigma_1^*$ und $L_2 \subseteq \Sigma_2^*$ kontextfreie Sprachen. Zeigen Sie, dass folgende Sprachen kontextfrei sind:

(a) $L_1 \cup L_2$

Lösung:

Da L_1 und L_2 kontextfrei sind, gibt es kontextfreie Grammatiken

$$G_1 = (N_1, \Sigma_1, P_1, S_1),$$

$$G_2 = (N_2, \Sigma_2, P_2, S_2)$$

mit $\mathcal{L}(G_1) = L_1$ und $\mathcal{L}(G_2) = L_2$. Sei $S \notin N_1 \cup N_2$. Wir konstruieren $G = (N, \Sigma, S, P)$ mit

$$N = N_1 \cup N_2 \cup \{S\},$$

$$\Sigma = \Sigma_1 \cup \Sigma_2,$$

$$P = P_1 \cup P_2 \cup \{S \rightarrow S_1, S \rightarrow S_2\}.$$

(b) $L_1 \circ L_2$

Lösung:

Dies geht analog zu $L_1 \cup L_2$ mit dem Unterschied, dass wir statt den Produktionen $\{S \rightarrow S_1, S \rightarrow S_2\}$ die Produktion $\{S \rightarrow S_1 S_2\}$ verwenden.

(c) L_1^R

Lösung:

Da L_1 kontextfrei ist, gibt es eine kontextfreie Grammatik

$$G = (N, \Sigma, P, S)$$

mit $\mathcal{L}(G) = L_1$. Die Grammatik für L_1^R ist $G' = (N, \Sigma, P', S)$, wobei

$$P' = \{A \rightarrow \alpha^R \mid A \rightarrow \alpha \in P\}.$$

Wir müssen jetzt bestimmen, was α^R ist für konkrete α . Zunächst stellen wir fest, dass für alle $w, v \in \Sigma^*$ gilt, dass $(wv)^R = v^R w^R$. Denn sei

$w = a_1 \cdots a_n$ und $v = b_1 \cdots b_m$ für $n, m \in \mathbb{N}$ und $a_i, b_j \in \Sigma$ für $1 \leq i \leq n$ und $1 \leq j \leq m$. Dann gilt

$$(wv)^R = b_m \cdots b_1 a_n \cdots a_1 = (b_1 \cdots b_m)^R (a_1 \cdots a_n)^R = v^R w^R.$$

Somit gilt für alle Sprachen $X, Y \subseteq \Sigma^*$, dass $(XY)^R = Y^R X^R$. Außerdem gilt $(X \cup Y)^R = X^R \cup Y^R$. Sei $A \rightarrow \alpha \in P$ mit

$$\alpha = w_0 A_1 w_1 \cdots w_{n-1} A_n w_n,$$

wobei $n \geq 0$, $w_i \in \Sigma^*$ für $0 \leq i \leq n$ und $A_i \in N$ für $1 \leq i \leq n$. Es gilt

$$\alpha^R = w_n^R A_n w_{n-1}^R \cdots w_1^R A_1 w_0^R.$$

Als nächstes müssen wir zeigen, dass unsere neue Grammatik G' wirklich die gesuchte ist. Für eine Grammatik $G = (N, \Sigma, P, S)$ und $\alpha \in (\Sigma \cup N)^*$ schreiben wir $\llbracket \alpha \rrbracket_G := \{w \in \Sigma^* \mid \alpha \rightarrow_G^* w\}$. Wir nehmen zunächst an, dass $\llbracket A_i \rrbracket_{G'} = \llbracket A_i \rrbracket_G^R$ für $1 \leq i \leq n$ und erhalten damit

$$\begin{aligned} \llbracket \alpha^R \rrbracket_{G'} &= \{w_n^R\} \llbracket A_n \rrbracket_{G'} \{w_{n-1}^R\} \cdots \{w_1^R\} \llbracket A_1 \rrbracket_{G'} \{w_0^R\} \\ &= \{w_n\}^R \llbracket A_n \rrbracket_G^R \{w_{n-1}\}^R \cdots \{w_1\}^R \llbracket A_1 \rrbracket_G^R \{w_0\}^R \\ &= (\{w_0\} \llbracket A_1 \rrbracket_G \{w_1\} \cdots \{w_{n-1}\} \llbracket A_n \rrbracket_G \{w_n\})^R \\ &= \llbracket \alpha \rrbracket_G^R. \end{aligned}$$

Nun beweisen wir auch noch die obige Annahme. Seien $A \rightarrow \alpha_1 \mid \cdots \mid \alpha_n$ für $n \geq 0$ die Produktionen für A in P . Es gilt

$$\begin{aligned} \llbracket A \rrbracket_{G'} &= \llbracket \alpha_1^R \rrbracket_{G'} \cup \cdots \cup \llbracket \alpha_n^R \rrbracket_{G'} \\ &= \llbracket \alpha_1 \rrbracket_G^R \cup \cdots \cup \llbracket \alpha_n \rrbracket_G^R \\ &= (\llbracket \alpha_1 \rrbracket_G \cup \cdots \cup \llbracket \alpha_n \rrbracket_G)^R \\ &= \llbracket A \rrbracket_G^R. \end{aligned}$$

Dies gilt insbesondere für S und somit ist $\mathcal{L}(G') = \mathcal{L}(G)^R$.

Beispiel: Wir nehmen die Sprache aus 2 (d). Durch das oben Gezeigte erhalten wir eine Grammatik $G' = (\{S, L, R\}, \{a, b, c\}, P', S)$, wobei P' gegeben ist durch

$$\begin{aligned} S &\rightarrow RL \\ L &\rightarrow \varepsilon \mid bLa \\ R &\rightarrow \varepsilon \mid cRb. \end{aligned}$$

Aufgabe 4 Sei G die erste Grammatik von Folie 94 des Skripts, also $G = (\{E\}, \{\text{name, int, +, *, (,)}\}, P, E)$ mit

$$P = \{E \rightarrow E + E \mid E * E \mid (E) \mid \text{name} \mid \text{int}\}$$

Zeigen Sie, dass diese in der Tat nicht eindeutig ist.

Lösung:

Nehmen wir zum Beispiel das Wort $\text{name} + \text{int} * \text{int}$. Dieses können wir nur aus dem Ausdruck $E + E * E$ erhalten. Für diesen haben wir allerdings mehrere Möglichkeiten, da wir erst $E + E$ und dann $E * E$ ableiten können oder umgekehrt. Bei der zweiten Grammatik von Folie 94 umgeht man dieses Problem durch mehrere Nichtterminale. Die beiden Ableitungsbäume wollen wir noch veranschaulichen:

