Übungsblatt 8

Aufgabe 1 Sei $\Sigma = \{a, +\}$ und $G_i = (\{S\}, \Sigma, P_i, S)$, $i \in \{1, 2\}$, wobei P_1 und P_2 gegeben sind durch:

$$P_1\colon S \to SS{+} \mid a$$
$$P_2\colon S \to {+}SS \mid a$$

(a) Konstruieren Sie die Shift-Reduce-Parser $M^{(1)}_{G_i}$ zu G_i, $i \in \{1, 2\}$.

Lösung:
$M^{(1)}_{G_1} = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ mit

$$\begin{aligned}
Q &= \{a, +, S, q_0, f\}\\
F &= \{f\}\\
\delta &= \{(a, a, aa), (+, a, +a), (q_0, a, q_0a), (f, a, fa), (S, a, Sa)\}\\
&\cup \{(a, +, a+), (+, +, ++), (q_0, +, q_0+), (f, +, f+), (S, +, S+)\}\\
&\cup \{(aa, \varepsilon, aS), (+a, \varepsilon, +S), (q_0a, \varepsilon, q_0S), (fa, \varepsilon, fS), (Sa, \varepsilon, SS)\}\\
&\cup \{(aSS+, \varepsilon, aS), (+SS+, \varepsilon, +S)\}\\
&\cup \{(q_0SS+, \varepsilon, q_0S), (fSS+, \varepsilon, fS), (SSS+, \varepsilon, SS)\}\\
&\cup \{(q_0S, \varepsilon, f)\}
\end{aligned}$$

$M^{(1)}_{G_2} = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ mit

$$\begin{aligned}
Q &= \{a, +, S, q_0, f\}\\
F &= \{f\}\\
\delta &= \{(a, a, aa), (+, a, +a), (q_0, a, q_0a), (f, a, fa), (S, a, Sa)\}\\
&\cup \{(a, +, a+), (+, +, ++), (q_0, +, q_0+), (f, +, f+), (S, +, S+)\}\\
&\cup \{(aa, \varepsilon, aS), (+a, \varepsilon, +S), (q_0a, \varepsilon, q_0S), (fa, \varepsilon, fS), (Sa, \varepsilon, SS)\}\\
&\cup \{(a+SS, \varepsilon, aS), (++SS, \varepsilon, +S)\}\\
&\cup \{(q_0+SS, \varepsilon, q_0S), (f+SS, \varepsilon, fS), (S+SS, \varepsilon, SS)\}\\
&\cup \{(q_0S, \varepsilon, f)\}
\end{aligned}$$

(b) Geben Sie für $M_{G_1}^{(1)}$ eine akzeptierende Konfigurationsfolge für $aa{+}a{+}$ an.

Lösung:
Konfigurationsfolge für $M_{G_1}^{(1)}$:

$$\begin{aligned}(q_0, aa{+}a{+}) &\vdash (q_0a, a{+}a{+}) \vdash (q_0S, a{+}a{+}) \vdash (q_0Sa, {+}a{+}) \vdash (q_0SS, {+}a{+})\\ &\vdash (q_0SS{+}, a{+}) \vdash (q_0S, a{+}) \vdash (q_0Sa, {+}) \vdash (q_0SS, {+})\\ &\vdash (q_0SS{+}, \varepsilon) \vdash (q_0S, \varepsilon) \vdash (f, \varepsilon)\end{aligned}$$

(c) Geben Sie für $M_{G_2}^{(1)}$ eine akzeptierende Konfigurationsfolge für ${+}a{+}aa$ an.

Lösung:
Konfigurationsfolge für $M_{G_2}^{(1)}$:

$$\begin{aligned}(q_0, {+}a{+}aa) &\vdash (q_0{+}, a{+}aa) \vdash (q_0{+}a, {+}aa) \vdash (q_0{+}S, {+}aa) \vdash (q_0{+}S{+}, aa)\\ &\vdash (q_0{+}S{+}a, a) \vdash (q_0{+}S{+}S, a) \vdash (q_0{+}S{+}Sa, \varepsilon)\\ &\vdash (q_0{+}S{+}SS, \varepsilon) \vdash (q_0{+}SS, \varepsilon) \vdash (q_0S, \varepsilon) \vdash (f, \varepsilon)\end{aligned}$$

Aufgabe 2 Sei $G = (N, T, P, S)$ eine kontextfreie Grammatik und $M_G^{(1)} = (Q, T, \delta, q_0, F)$ der zugehörige Shift-Reduce-Parser. Zeigen Sie, dass der Parser korrekt arbeitet, d.h. dass für alle $q \in Q, A \in N$ und $w \in T^*$ gilt:

$$(q, w) \vdash^* (qA, \varepsilon) \iff A \to^* w.$$

Lösung:
Wir zeigen beide Richtungen via Induktion.

„$\Leftarrow$“ Wir machen eine Induktion über die Anzahl der Ableitungsschritte. $A \to^1 w$ heißt $(A \to w) \in P$. Der Parser macht im ersten Schritt dann $|w|$-viele Shift-Übergänge, also $(q, w) \vdash^{|w|} (qw, \varepsilon)$. Wegen $(A \to w) \in P$ können wir jetzt einen Reduce-Übergang anwenden und erhalten $(qw, \varepsilon) \vdash (qA, \varepsilon)$.

Nun nehmen wir an, die Aussage wurde bereits für höchstens n-viele Ableitungsschritte gezeigt. Betrachte jetzt $A \to^{n+1} w$. Der erste Ableitungsschritt sei $A \to w_0A_1w_1 \cdots A_mw_m$ (dies ist eine Produktion in P), wobei $A_i \in N$ und $w_j \in T^*$ sind. Da wir in n weiteren Ableitungsschritten das Wort w ableiten können, wissen wir, dass $(A_i \to^{k_i} \alpha_i)$

mit $\alpha_i \in T^*$ und $\sum_{i=1}^m k_i = n$ gelten. Insbesondere hat w dann die Gestalt $w = w_0\alpha_1 w_1 \cdots \alpha_m w_m$. Die Induktionsvorraussetzung impliziert $(q_i, \alpha_i v_i) \vdash^* (q_i A_i, v_i)$ für ein $q_i \in Q, v_i \in T^*$. Wir erhalten

$$\begin{aligned}(q, w) = (q, w_0\alpha_1 w_1 \cdots \alpha_m w_m) &\vdash^* (qw_0, \alpha_1 w_1 \cdots \alpha_m w_m) \quad \text{(Shift)}\\ &\vdash^* (qw_0A_1, w_1 \cdots \alpha_m w_m) \quad \text{(IV)}\\ &\vdash^* \cdots \quad \text{(Shift und IV)}\\ &\vdash^* (qw_0A_1w_1 \cdots A_m w_m, \varepsilon)\\ &\vdash^* (qA, \varepsilon) \quad \text{(Reduce).}\end{aligned}$$

Somit haben wir die Rückrichtung „$\Leftarrow$“ gezeigt.

„$\Rightarrow$“ Hier machen wir eine Induktion über die Anzahl der Übergänge des Kellerautomaten. Ein Übergang heißt $(q, w) \vdash (qA, \varepsilon)$. Dies ist aber nur möglich, wenn $w = \varepsilon$ und $(q, \varepsilon, qA) \in \delta$ ist. Daraus folgt aber, dass $(A \to \varepsilon) \in P$ gilt.

Wir nehmen wieder an, wir haben die Aussage für höchstens n Übergangsschritte gezeigt. Es gelte nun also $(q, w) \vdash^{n+1} (qA, \varepsilon)$. Dies bedeutet, es gibt einen Reduce-Übergang $(q\alpha, \varepsilon, qA) \in \delta$, m.a.W. $(A \to \alpha) \in P$. Außerdem $(q, w) \vdash^n (q\alpha, \varepsilon)$. Sei $\alpha = w_0A_1w_1 \cdots A_m w_m$ mit $w_i \in T^*$ und $A_j \in N$. Jedes A_j kann nur durch verschiedene Shift-Reduce-Übergänge ausgehend von einem Teilwort von w in den Keller gekommen sein, bzw. genauer gibt es $q_j \in Q, v_j, a_j \in T^*$ mit $(q_j, \alpha_j v_j) \vdash^{k_j} (q_j A_j, v_j)$ und $k_j \leq n$. Nach Induktionsvoraussetzung haben wir insbesondere $A_j \to^* \alpha_j \in T^*$, da wir bis zu diesem Zeitpunkt höchstens n viele Übergänge im Automaten gemacht haben. Dadurch erhalten wir insgesamt die $n + 1$ Übergänge wie folgt:

$$\begin{aligned}(qA, \varepsilon) &\dashv (qw_0A_1w_1 \cdots A_m w_m, \varepsilon)\\ &\dashv^{|w_m|} (qw_0A_1w_1 \cdots A_m, w_m) \quad \text{(Shift)}\\ &\dashv^{k_m} (qw_0A_1w_1 \cdots w_{m-1}, \alpha_m w_m) \quad \text{(IV)}\\ &\dashv \cdots \quad \text{(Shift und IV)}\\ &\dashv^{k_1} (qw_0, \alpha_1 w_1 \cdots \alpha_m w_m) \quad \text{(IV)}\\ &\dashv^{|w_0|} (q, w_0\alpha_1 w_1 \cdots \alpha_m w_m) \quad \text{(Shift)}\\ &= (q, w)\end{aligned}$$

Das Zeichen $\dashv$ bedeutet hierbei, dass der Automat quasi rückwärts läuft. Es gilt $|w_0| + \sum_{i=1}^m (|w_i| + k_i) = n$ und $w = w_0\alpha_1 w_1 \cdots \alpha_m w_m$. Da $(A \to \alpha) \in P$ ist und $\alpha = w_0A_1w_1 \cdots A_m w_m$, sowie $A_j \to^* \alpha_j \in T^*$ gilt, muss auch $A \to^* w \in T^*$ gelten, was zu zeigen war.