Universität Siegen
Lehrstuhl Theoretische Informatik
Markus Lohrey

Übungsblatt 9

Aufgabe 1 Sei $\Sigma = \{a, +\}$ und $G_i = (\{S\}, \Sigma, P_i, S)$, $i \in \{1, 2\}$, wobei P_1 und P_2 gegeben sind durch:

$$P_1\colon S \to SS{+} \mid a$$
$$P_2\colon S \to {+}SS \mid a$$

(a) Konstruieren Sie die Item-Kellerautomaten $M_{G_i}^{(2)}$ zu G_i, $i \in \{1, 2\}$.

(b) Geben Sie für $M_{G_1}^{(2)}$ eine akzeptierende Konfigurationsfolge für $aa{+}a{+}$ an.

(c) Geben Sie für $M_{G_2}^{(2)}$ eine akzeptierende Konfigurationsfolge für ${+}a{+}aa$ an.

Aufgabe 2 Sei im Folgenden Σ ein endliches Alphabet und $k \in \mathbb{N}$. Mit $\circ\colon \Sigma^* \times \Sigma^* \to \Sigma^*$ bezeichnen wir die Konkatenation zweier Wörter. Sei $\diamond_\mathrm{k}\colon \Sigma^* \to \Sigma^{\leq k}$ (die ersten k Zeichen eines Worts) definiert als

$$\diamond_\mathrm{k}(a_1 \dots a_n) = a_1 \dots a_{\min(n,k)} = \begin{cases} a_1 \dots a_k & \text{falls } k \leq n, \\ a_1 \dots a_n & \text{sonst.} \end{cases}$$

Sei außerdem $\odot_k\colon \Sigma^{\leq k} \times \Sigma^{\leq k} \to \Sigma^{\leq k}$ definiert als

$$w_1 \odot_k w_2 = \diamond_\mathrm{k}(w_1 \circ w_2).$$

(a) Welche Fälle treten bei $\diamond_\mathrm{k}(w_1 \circ w_2)$ für $w_1, w_2 \in \Sigma^*$ auf?

(b) Zeigen Sie: Für alle $w_1, w_2 \in \Sigma^*$ gilt, dass

$$\diamond_\mathrm{k}(w_1 \circ w_2) = \diamond_\mathrm{k}(\diamond_\mathrm{k}(w_1) \circ \diamond_\mathrm{k}(w_2)).$$

(c) Zeigen Sie, dass $(\Sigma^{\leq k}, \odot_k, \varepsilon)$ ein Monoid ist, also:

- Für alle $w \in \Sigma^{\leq k}$ gilt $w \odot_k \varepsilon = \varepsilon \odot_k w = w$.

- Für alle $w_1, w_2, w_3 \in \Sigma^{\leq k}$ gilt $w_1 \odot_k (w_2 \odot_k w_3) = (w_1 \odot_k w_2) \odot_k w_3$.

(d) Schließen Sie aus Teilaufgabe (b), dass $\diamond_\mathrm{k} \colon (\Sigma^*, \circ, \varepsilon) \to (\Sigma^{\leq k}, \odot_k, \varepsilon)$ ein Monoid-Homomorphismus ist, also:

- $\diamond_\mathrm{k}(\varepsilon) = \varepsilon$.
- Für für alle $w_1, w_2 \in \Sigma^*$ gilt $\diamond_\mathrm{k}(w_1 \circ w_2) = \diamond_\mathrm{k}(w_1) \odot_k \diamond_\mathrm{k}(w_2)$.

Aufgabe 3 Zeigen Sie die Aussagen über die Operation $\odot : \mathbb{D}_k \times \mathbb{D}_k \to \mathbb{D}_k$ von Folie 134:

a) $L \odot \emptyset = \emptyset$

b) $\emptyset \odot L = \emptyset$

c) $L \odot (L_1 \cup L_2) = (L \odot L_1) \cup (L \odot L_2)$

d) $(L_1 \cup L_2) \odot L = (L_1 \odot L) \cup (L_2 \odot L)$