Übungsblatt 9

Aufgabe 1 Sei $\Sigma = \{a, +\}$ und $G_i = (\{S\}, \Sigma, P_i, S)$, $i \in \{1, 2\}$, wobei P_1 und P_2 gegeben sind durch:

$$P_1 \colon S \to SS+ \mid a$$
$$P_2 \colon S \to +SS \mid a$$

(a) Konstruieren Sie die Item-Kellerautomaten $M^{(2)}_{G_i}$ zu G_i, $i \in \{1, 2\}$.

Lösung:
$M^{(2)}_{G_1} = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ mit

$$\begin{aligned}
Q &= \{[S' \to \bullet S], [S' \to S\bullet]\} \\
&\cup \{[S \to \bullet a], [S \to a\bullet]\} \\
&\cup \{[S \to \bullet SS+], [S \to S\bullet S+], [S \to SS\bullet +], [S \to SS+\bullet]\} \\
q_0 &= [S' \to \bullet S] \\
F &= \{[S' \to S\bullet]\} \\
\delta &= \{([S' \to \bullet S], \varepsilon, [S' \to \bullet S][S \to \bullet a])\} \\
&\cup \{([S' \to \bullet S], \varepsilon, [S' \to \bullet S][S \to \bullet SS+])\} \\
&\cup \{([S \to \bullet SS+], \varepsilon, [S \to \bullet SS+][S \to \bullet a])\} \\
&\cup \{([S \to \bullet SS+], \varepsilon, [S \to \bullet SS+][S \to \bullet SS+])\} \\
&\cup \{([S \to S\bullet S+], \varepsilon, [S \to S\bullet S+][S \to \bullet a])\} \\
&\cup \{([S \to S\bullet S+], \varepsilon, [S \to S\bullet S+][S \to \bullet SS+])\} \\
&\cup \{([S \to \bullet a], a, [S \to a\bullet])\} \\
&\cup \{([S \to SS\bullet +], +, [S \to SS+\bullet])\} \\
&\cup \{([S' \to \bullet S][S \to a\bullet], \varepsilon, [S' \to S\bullet])\} \\
&\cup \{([S' \to \bullet S][S \to SS+\bullet], \varepsilon, [S' \to S\bullet])\} \\
&\cup \{([S \to \bullet SS+][S \to a\bullet], \varepsilon, [S \to S\bullet S+])\} \\
&\cup \{([S \to \bullet SS+][S \to SS+\bullet], \varepsilon, [S \to S\bullet S+])\} \\
&\cup \{([S \to S\bullet S+][S \to a\bullet], \varepsilon, [S \to SS\bullet +])\} \\
&\cup \{([S \to S\bullet S+][S \to SS+\bullet], \varepsilon, [S \to SS\bullet +])\}
\end{aligned}$$

$M_{G_2}^{(2)} = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ mit

$$
\begin{aligned}
Q &= \{[S' \to \bullet S], [S' \to S\bullet]\}\\
&\cup \{[S \to \bullet a], [S \to a\bullet]\}\\
&\cup \{[S \to \bullet{+}SS], [S \to +\bullet SS], [S \to +S\bullet S], [S \to +SS\bullet]\}\\
q_0 &= [S' \to \bullet S]\\
F &= \{[S' \to S\bullet]\}\\
\delta &= \{([S' \to \bullet S], \varepsilon, [S' \to \bullet S][S \to \bullet a])\}\\
&\cup \{([S' \to \bullet S], \varepsilon, [S' \to \bullet S][S \to \bullet{+}SS])\}\\
&\cup \{([S \to +\bullet SS], \varepsilon, [S \to +\bullet SS][S \to \bullet a])\}\\
&\cup \{([S \to +\bullet SS], \varepsilon, [S \to +\bullet SS][S \to \bullet{+}SS])\}\\
&\cup \{([S \to +S\bullet S], \varepsilon, [S \to +S\bullet S][S \to \bullet a])\}\\
&\cup \{([S \to +S\bullet S], \varepsilon, [S \to +S\bullet S][S \to \bullet{+}SS])\}\\
&\cup \{([S \to \bullet a], a, [S \to a\bullet])\}\\
&\cup \{([S \to \bullet{+}SS], +, [S \to +\bullet SS])\}\\
&\cup \{([S' \to \bullet S][S \to a\bullet], \varepsilon, [S' \to S\bullet])\}\\
&\cup \{([S' \to \bullet S][S \to +SS\bullet], \varepsilon, [S' \to S\bullet])\}\\
&\cup \{([S \to +\bullet SS][S \to a\bullet], \varepsilon, [S \to +S\bullet S])\}\\
&\cup \{([S \to +\bullet SS][S \to +SS\bullet], \varepsilon, [S \to +S\bullet S])\}\\
&\cup \{([S \to +S\bullet S][S \to a\bullet], \varepsilon, [S \to +SS\bullet])\}\\
&\cup \{([S \to +S\bullet S][S \to +SS\bullet], \varepsilon, [S \to +SS\bullet])\}
\end{aligned}
$$

(b) Geben Sie für $M_{G_1}^{(2)}$ eine akzeptierende Konfigurationsfolge für $aa{+}a{+}$ an.

Lösung:
Konfigurationsfolge für $M_{G_1}^{(2)}$:

$$
\begin{aligned}
&([S' \to \bullet S], aa{+}a{+}) \\
&\vdash ([S' \to \bullet S][S \to \bullet SS{+}], aa{+}a{+}) \\
&\vdash ([S' \to \bullet S][S \to \bullet SS{+}][S \to \bullet SS{+}], aa{+}a{+}) \\
&\vdash ([S' \to \bullet S][S \to \bullet SS{+}][S \to \bullet SS{+}][S \to \bullet a], aa{+}a{+}) \\
&\vdash ([S' \to \bullet S][S \to \bullet SS{+}][S \to \bullet SS{+}][S \to a\bullet], a{+}a{+}) \\
&\vdash ([S' \to \bullet S][S \to \bullet SS{+}][S \to S\bullet S{+}], a{+}a{+}) \\
&\vdash ([S' \to \bullet S][S \to \bullet SS{+}][S \to S\bullet S{+}][S \to \bullet a], a{+}a{+}) \\
&\vdash ([S' \to \bullet S][S \to \bullet SS{+}][S \to S\bullet S{+}][S \to a\bullet], {+}a{+}) \\
&\vdash ([S' \to \bullet S][S \to \bullet SS{+}][S \to SS\bullet{+}], {+}a{+}) \\
&\vdash ([S' \to \bullet S][S \to \bullet SS{+}][S \to SS{+}\bullet], a{+}) \\
&\vdash ([S' \to \bullet S][S \to S\bullet S{+}], a{+}) \\
&\vdash ([S' \to \bullet S][S \to S\bullet S{+}][S \to \bullet a], a{+}) \\
&\vdash ([S' \to \bullet S][S \to S\bullet S{+}][S \to a\bullet], {+}) \\
&\vdash ([S' \to \bullet S][S \to SS\bullet{+}], {+}) \\
&\vdash ([S' \to \bullet S][S \to SS{+}\bullet], \varepsilon) \\
&\vdash ([S' \to S\bullet], \varepsilon)
\end{aligned}
$$

(c) Geben Sie für $M_{G_2}^{(2)}$ eine akzeptierende Konfigurationsfolge für $+a+aa$ an.

Lösung:
Konfigurationsfolge für $M_{G_2}^{(2)}$:

$$
\begin{aligned}
&([S' \to \bullet S], +a+aa)\\
&\vdash ([S' \to \bullet S][S \to \bullet +SS], +a+aa)\\
&\vdash ([S' \to \bullet S][S \to +\bullet SS], a+aa)\\
&\vdash ([S' \to \bullet S][S \to +\bullet SS][S \to \bullet a], a+aa)\\
&\vdash ([S' \to \bullet S][S \to +\bullet SS][S \to a\bullet], +aa)\\
&\vdash ([S' \to \bullet S][S \to +S\bullet S], +aa)\\
&\vdash ([S' \to \bullet S][S \to +S\bullet S][S \to \bullet +SS], +aa)\\
&\vdash ([S' \to \bullet S][S \to +S\bullet S][S \to +\bullet SS], aa)\\
&\vdash ([S' \to \bullet S][S \to +S\bullet S][S \to +\bullet SS][S \to \bullet a], aa)\\
&\vdash ([S' \to \bullet S][S \to +S\bullet S][S \to +\bullet SS][S \to a\bullet], a)\\
&\vdash ([S' \to \bullet S][S \to +S\bullet S][S \to +S\bullet S], a)\\
&\vdash ([S' \to \bullet S][S \to +S\bullet S][S \to +S\bullet S][S \to \bullet a], a)\\
&\vdash ([S' \to \bullet S][S \to +S\bullet S][S \to +S\bullet S][S \to a\bullet], \varepsilon)\\
&\vdash ([S' \to \bullet S][S \to +S\bullet S][S \to +SS\bullet], \varepsilon)\\
&\vdash ([S' \to \bullet S][S \to +SS\bullet], \varepsilon)\\
&\vdash ([S' \to S\bullet], \varepsilon)
\end{aligned}
$$

Aufgabe 2 Sei im Folgenden Σ ein endliches Alphabet und $k \in \mathbb{N}$. Mit $\circ\colon \Sigma^* \times \Sigma^* \to \Sigma^*$ bezeichnen wir die Konkatenation zweier Wörter. Sei $\diamond_{\mathrm{k}}\colon \Sigma^* \to \Sigma^{\leq k}$ (die ersten k Zeichen eines Worts) definiert als

$$
\begin{aligned}
\diamond_{\mathrm{k}}(a_1 \dots a_n) &= a_1 \dots a_{\min(n,k)}\\
&= \begin{cases} a_1 \dots a_k & \text{falls } k \leq n,\\ a_1 \dots a_n & \text{sonst.} \end{cases}
\end{aligned}
$$

Sei außerdem $\odot_k\colon \Sigma^{\leq k} \times \Sigma^{\leq k} \to \Sigma^{\leq k}$ definiert als

$$w_1 \odot_k w_2 = \diamond_{\mathrm{k}}(w_1 \circ w_2).$$

(a) Welche Fälle treten bei $\diamond_{\mathrm{k}}(w_1 \circ w_2)$ für $w_1, w_2 \in \Sigma^*$ auf?

Lösung:
Wenn $k \leq |w_1|$, dann gilt $\diamond_{\mathrm{k}}(w_1 \circ w_2) = \diamond_{\mathrm{k}}(w_1)$. Wenn $k > |w_1|$, dann gilt $\diamond_{\mathrm{k}}(w_1 \circ w_2) = w_1 \circ \diamond_{\mathrm{k\text{-}|w_1|}}(w_2)$.

(b) Zeigen Sie: Für alle $w_1, w_2 \in \Sigma^*$ gilt, dass

$$\diamond_\mathrm{k}(w_1 \circ w_2) = \diamond_\mathrm{k}(\diamond_\mathrm{k}(w_1) \circ \diamond_\mathrm{k}(w_2)).$$

Lösung:

$k \leq |w_1|$: Es gilt $\diamond_\mathrm{k}(w_1 \circ w_2) = \diamond_\mathrm{k}(w_1)$. Außerdem folgt aus $|(\diamond_\mathrm{k}(w_1))| = k$, dass $\diamond_\mathrm{k}(\diamond_\mathrm{k}(w_1) \circ \diamond_\mathrm{k}(w_2)) = \diamond_\mathrm{k}(\diamond_\mathrm{k}(w_1)) = \diamond_\mathrm{k}(w_1)$.

$k > |w_1|$: Es gilt für alle $w \in \Sigma^*$, dass $\diamond_\mathrm{k}(w_1 \circ w) = w_1 \circ \diamond_{\mathrm{k\text{-}|w_1|}}(w)$. Außerdem gilt, dass $\diamond_\mathrm{k}(w_1) = w_1$, also

$$\begin{aligned}\diamond_\mathrm{k}(\diamond_\mathrm{k}(w_1) \circ \diamond_\mathrm{k}(w_2)) &= \diamond_\mathrm{k}(w_1 \circ \diamond_\mathrm{k}(w_2)) \\ &= w_1 \circ \diamond_{\mathrm{k\text{-}|w_1|}}(\diamond_\mathrm{k}(w_2)) \\ &= w_1 \circ \diamond_{\mathrm{k\text{-}|w_1|}}(w_2).\end{aligned}$$

Der letzte Schritt folgt aus der Tatsache, dass für alle $w \in \Sigma^*$ und $k' \in \mathbb{N}$ mit $k' \leq k$ gilt, dass $\diamond_{\mathrm{k'}}(\diamond_\mathrm{k}(w)) = \diamond_{\mathrm{k'}}(w)$.

(c) Zeigen Sie, dass $(\Sigma^{\leq k}, \odot_k, \varepsilon)$ ein Monoid ist, also:

- Für alle $w \in \Sigma^{\leq k}$ gilt $w \odot_k \varepsilon = \varepsilon \odot_k w = w$.
  Lösung:
  Es gilt $\diamond_\mathrm{k}(w) = w$ für alle $w \in \Sigma^{\leq k}$, also

  $$\begin{aligned}w \odot_k \varepsilon &= \diamond_\mathrm{k}(w \circ \varepsilon) = \diamond_\mathrm{k}(w) = w \\ \varepsilon \odot_k w &= \diamond_\mathrm{k}(\varepsilon \circ w) = \diamond_\mathrm{k}(w) = w.\end{aligned}$$

- Für alle $w_1, w_2, w_3 \in \Sigma^{\leq k}$ gilt $w_1 \odot_k (w_2 \odot_k w_3) = (w_1 \odot_k w_2) \odot_k w_3$.
  Lösung:
  Aus (b) und der Tatsache, dass $\diamond_\mathrm{k}(\diamond_\mathrm{k}(w)) = \diamond_\mathrm{k}(w)$ für alle $w \in \Sigma^*$, erhalten wir für alle $w, w' \in \Sigma^*$, dass

  $$\begin{aligned}\diamond_\mathrm{k}(w \circ w') &= \diamond_\mathrm{k}(\diamond_\mathrm{k}(w) \circ \diamond_\mathrm{k}(w')) \\ &= \diamond_\mathrm{k}(\diamond_\mathrm{k}(w) \circ \diamond_\mathrm{k}(\diamond_\mathrm{k}(w'))) \\ &= \diamond_\mathrm{k}(w \circ \diamond_\mathrm{k}(w')).\end{aligned}$$

  Analog gilt, dass

  $$\diamond_\mathrm{k}(w \circ w') = \diamond_\mathrm{k}(\diamond_\mathrm{k}(w) \circ w').$$

  Somit erhalten wir für alle $w_1, w_2, w_3 \in \Sigma^*$, dass

  $$\begin{aligned}(w_1 \odot_k w_2) \odot_k w_3 &= \diamond_\mathrm{k}(\diamond_\mathrm{k}(w_1 \circ w_2) \circ w_3) \\ &= \diamond_\mathrm{k}((w_1 \circ w_2) \circ w_3) \\ &= \diamond_\mathrm{k}(w_1 \circ (w_2 \circ w_3)) \\ &= \diamond_\mathrm{k}(w_1 \circ \diamond_\mathrm{k}(w_2 \circ w_3)) \\ &= w_1 \odot_k (w_2 \odot_k w_3).\end{aligned}$$

(d) Schließen Sie aus Teilaufgabe (b), dass $\diamond_{\mathrm{k}}\colon (\Sigma^*, \circ, \varepsilon) \to (\Sigma^{\leq k}, \odot_k, \varepsilon)$ ein Monoid-Homomorphismus ist, also:

- $\diamond_{\mathrm{k}}(\varepsilon) = \varepsilon$.

  Lösung:
  Klar.

- Für für alle $w_1, w_2 \in \Sigma^*$ gilt $\diamond_{\mathrm{k}}(w_1 \circ w_2) = \diamond_{\mathrm{k}}(w_1) \odot_k \diamond_{\mathrm{k}}(w_2)$.

  Lösung:
  $$\diamond_{\mathrm{k}}(w_1 \circ w_2) = \diamond_{\mathrm{k}}(\diamond_{\mathrm{k}}(w_1) \circ \diamond_{\mathrm{k}}(w_2)) = \diamond_{\mathrm{k}}(w_1) \odot_k \diamond_{\mathrm{k}}(w_2).$$

Aufgabe 3 Zeigen Sie die Aussagen über die Operation $\odot : \mathbb{D}_k \times \mathbb{D}_k \to \mathbb{D}_k$ von Folie 134:

a) $L \odot \emptyset = \emptyset$

b) $\emptyset \odot L = \emptyset$

Lösung:
Es gilt $L_1 \circ L_2 = \{uv \mid u \in L_1, v \in L_2\}$ per Definition. Wenn also L_1 oder L_2 keine Elemente enthält, so ist $L_1 \circ L_2 = \emptyset$. Folglich ist $L \odot \emptyset = \emptyset \odot L = \emptyset$.

c) $L \odot (L_1 \cup L_2) = (L \odot L_1) \cup (L \odot L_2)$

Lösung:
Es gilt:

$$\begin{aligned} L \odot (L_1 \cup L_2) &= \mathrm{First}_k(L \circ (L_1 \cup L_2)) \\ &= \mathrm{First}_k((L \circ L_1) \cup (L \circ L_2)) \\ &= \mathrm{First}_k(L \circ L_1) \cup \mathrm{First}_k(L \circ L_2) \\ &= (L \odot L_1) \cup (L \odot L_2) \end{aligned}$$

d) $(L_1 \cup L_2) \odot L = (L_1 \odot L) \cup (L_2 \odot L)$

Lösung:
Völlig analog zur c).

Beachte: Bei Aufgabe 2 wurde eine Operation $\odot_k$ auf Wörtern der Länge höchstens k definiert, genauso wie der Abschneideoperator $\diamond_{\mathrm{k}}$. Mit dieser Notation kann man bei dieser Aufgabe, wo es um Sprachen geht, eine neue Definition einführen:

$$L_1 \odot L_2 = \mathrm{First}_k(L_1 \circ L_2) = \{\diamond_{\mathrm{k}}(w) \mid w = uv, u \in L_1, v \in L_2\}$$