Universität Siegen
Lehrstuhl Theoretische Informatik
Markus Lohrey

Übungsblatt 10

Aufgabe 1 Sei $G = (\{S\}, \{a, +, *\}, P, S)$, wobei P gegeben ist durch:

$$P\colon S \to +SS \mid *SS \mid a$$

(a) Berechnen Sie $\mathrm{First}_1(\alpha)$ für jedes $A \to \alpha \in P$.

Lösung:
Das Ungleichungssystem ist

$$\mathrm{First}_1(S) \supseteq \mathrm{First}_1(+SS) \cup \mathrm{First}_1(*SS) \cup \mathrm{First}_1(a).$$

Wir starten mit $\mathrm{First}_1(S) = \emptyset$, also

$$\begin{aligned}\mathrm{First}_1(S) &\supseteq (\{+\} \odot_1 \emptyset \odot_1 \emptyset) \cup (\{*\} \odot_1 \emptyset \odot_1 \emptyset) \cup \{a\}\\ &= \emptyset \cup \emptyset \cup \{a\}\\ &= \{a\}.\end{aligned}$$

Wir haben also $\mathrm{First}_1(S) \supseteq \{a\}$ und erhalten

$$\begin{aligned}\mathrm{First}_1(S) &\supseteq (\{+\} \odot_1 \{a\} \odot_1 \{a\}) \cup (\{*\} \odot_1 \{a\} \odot_1 \{a\}) \cup \{a\}\\ &= \{+\} \cup \{*\} \cup \{a\}\\ &= \{+, *, a\}.\end{aligned}$$

Wir haben also $\mathrm{First}_1(S) \supseteq \{+, *, a\}$ und erhalten

$$\begin{aligned}\mathrm{First}_1(S) &\supseteq (\{+\} \odot_1 \{+, *, a\} \odot_1 \{+, *, a\})\\ &\quad \cup (\{*\} \odot_1 \{+, *, a\} \odot_1 \{+, *, a\})\\ &\quad \cup \{a\}\\ &= \{+\} \cup \{*\} \cup \{a\}\\ &= \{+, *, a\}.\end{aligned}$$

Da wir wieder $\mathrm{First}_1(S) \supseteq \{+, *, a\}$ erhalten haben, gilt $\mathrm{First}_1(S) = \{+, *, a\}$. Wir erhalten also für die rechten Seiten, dass

$$\begin{aligned}\mathrm{First}_1(+SS) &= \{+\} \odot_1 \{+, *, a\} \odot_1 \{+, *, a\} = \{+\},\\ \mathrm{First}_1(*SS) &= \{*\} \odot_1 \{+, *, a\} \odot_1 \{+, *, a\} = \{*\},\\ \mathrm{First}_1(a) &= \{a\}.\end{aligned}$$

(b) Berechnen Sie $\mathrm{First}_2(\alpha)$ für jedes $A \to \alpha \in P$.

Lösung:
Das Ungleichungssystem ist

$$\mathrm{First}_2(S) \supseteq \mathrm{First}_2(+SS) \cup \mathrm{First}_2(*SS) \cup \mathrm{First}_2(a).$$

Wir starten mit $\mathrm{First}_2(S) = \emptyset$, also

$$\begin{aligned}\mathrm{First}_2(S) &\supseteq (\{+\} \odot_2 \emptyset \odot_2 \emptyset) \cup (\{*\} \odot_2 \emptyset \odot_2 \emptyset) \cup \{a\} \\ &= \emptyset \cup \emptyset \cup \{a\} \\ &= \{a\}.\end{aligned}$$

Wir haben also $\mathrm{First}_2(S) \supseteq \{a\}$ und erhalten

$$\begin{aligned}\mathrm{First}_2(S) &\supseteq (\{+\} \odot_2 \{a\} \odot_2 \{a\}) \cup (\{*\} \odot_2 \{a\} \odot_2 \{a\}) \cup \{a\} \\ &= \{+a\} \cup \{*a\} \cup \{a\} \\ &= \{+a, *a, a\}.\end{aligned}$$

Wir haben also $\mathrm{First}_2(S) \supseteq \{+a, *a, a\}$ und erhalten

$$\begin{aligned}\mathrm{First}_2(S) \supseteq\ &(\{+\} \odot_2 \{+a, *a, a\} \odot_2 \{+a, *a, a\}) \\ &\cup (\{*\} \odot_2 \{+a, *a, a\} \odot_2 \{+a, *a, a\}) \\ &\cup \{a\} \\ &= \{++, +*, +a\} \cup \{*+, **, *a\} \cup \{a\} \\ &= \{++, +*, +a, *+, **, *a, a\}.\end{aligned}$$

Wir haben also $\mathrm{First}_2(S) \supseteq \{++, +*, +a, *+, **, *a, a\}$ und erhalten

$$\begin{aligned}\mathrm{First}_2(S) \supseteq\ &(\{+\} \odot_2 \{++, +*, +a, *+, **, *a, a\} \\ &\qquad \odot_2 \{++, +*, +a, *+, **, *a, a\}) \\ &\cup (\{*\} \odot_2 \{++, +*, +a, *+, **, *a, a\} \\ &\qquad \odot_2 \{++, +*, +a, *+, **, *a, a\}) \\ &\cup \{a\} \\ &= \{++, +*, +a\} \cup \{*+, **, *a\} \cup \{a\} \\ &= \{++, +*, +a, *+, **, *a, a\}.\end{aligned}$$

Da wir wieder $\mathrm{First}_2(S) \supseteq \{++, +*, +a, *+, **, *a, a\}$ erhalten haben, gilt $\mathrm{First}_2(S) = \{++, +*, +a, *+, **, *a, a\}$. Wir erhalten also für die rechten Seiten, dass

$$\begin{aligned}\mathrm{First}_2(+SS) &= \{+\} \odot_2 \{++, +*, +a, *+, **, *a, a\} \\ &\qquad \odot_2 \{++, +*, +a, *+, **, *a, a\} \\ &= \{++, +*, +a\}, \\ \mathrm{First}_2(*SS) &= \{*\} \odot_2 \{++, +*, +a, *+, **, *a, a\} \\ &\qquad \odot_2 \{++, +*, +a, *+, **, *a, a\} \\ &= \{*+, **, *a\}, \\ \mathrm{First}_2(a) &= \{a\}.\end{aligned}$$

(c) Überlegen Sie sich, wie man $M_G^{(2)}$ mit Hilfe von First deterministisch machen kann.

Lösung:
Es genügen hier die First_1-Mengen, um den Item-Kellerautomaten deterministisch zu machen. Sind wir im Zustand $[S \to x\bullet SS]$ oder im Zustand $[S \to xS\bullet S]$, so können wir eindeutig die nächste Expansionsregel nehmen, wenn wir das nächste Zeichen kennen. Dabei bedeutet das Zeichen $x \in \{+, *\}$, dass wir die Regel $S \to xSS$ nehmen müssen und a, dass $S \to a$ die richtige Wahl ist.

Aufgabe 2 Sei $G = (\{S\}, \{a, +, *\}, P, S)$, wobei P gegeben ist durch:

$$P\colon S \to SS+ \mid SS* \mid a$$

(a) Berechnen Sie $\mathrm{First}_1(\alpha)$ für jedes $A \to \alpha \in P$.

Lösung:
Das Ungleichungssystem ist

$$\mathrm{First}_1(S) \supseteq \mathrm{First}_1(SS+) \cup \mathrm{First}_1(SS*) \cup \mathrm{First}_1(a).$$

Wir starten mit $\mathrm{First}_1(S) = \emptyset$, also

$$\begin{aligned}\mathrm{First}_1(S) &\supseteq (\emptyset \odot_1 \emptyset \odot_1 \{+\}) \cup (\emptyset \odot_1 \emptyset \odot_1 \{*\}) \cup \{a\} \\ &= \emptyset \cup \emptyset \cup \{a\} \\ &= \{a\}.\end{aligned}$$

Wir haben also $\mathrm{First}_1(S) \supseteq \{a\}$ und erhalten

$$\begin{aligned}\mathrm{First}_1(S) &\supseteq (\{a\} \odot_1 \{a\} \odot_1 \{+\}) \cup (\{a\} \odot_1 \{a\} \odot_1 \{*\}) \cup \{a\} \\ &= \{a\}\end{aligned}$$

Da wir wieder $\text{First}_1(S) \supseteq \{a\}$ erhalten haben, gilt $\text{First}_1(S) = \{a\}$. Wir erhalten also für die rechten Seiten, dass

$$\begin{aligned}
\text{First}_1(SS+) &= \{a\} \odot_1 \{a\} \odot_1 \{+\} = \{a\}, \\
\text{First}_1(SS*) &= \{a\} \odot_1 \{a\} \odot_1 \{*\} = \{a\}, \\
\text{First}_1(a) &= \{a\}.
\end{aligned}$$

(b) Kann man $M_G^{(2)}$ mit Hilfe von First deterministisch machen?

Lösung:
Wie man bei First_1 schon sieht, ist der nächste Schritt im Allgemeinen nicht eindeutig. Tatsächlich gilt für jedes $k \geq 1$

$$\text{First}_k(SS+) \cap \text{First}_k(SS*) \neq \emptyset.$$

Denn: Beide First_k-Mengen enthalten ein Anfangsstück der Länge k von $aaaaa\cdots$. Konket bedeutet das, man kann ständig $S \to SSx$ gefolgt von $S \to a$ alternierend ableiten, ohne dass man weiß, ob x in einem Schritt $+$ oder $*$ ist. Somit ist der Nichtdeterminismus unvermeidbar.

Aufgabe 3 Zeigen Sie, dass $(\mathbb{D}_k, \cup, \emptyset, \odot, \{\varepsilon\})$ ein Bewertungshalbring ist, das heißt

(a) $(\mathbb{D}_k, \cup)$ ist ein kommutatives Monoid mit neutralem Element $\emptyset$,

Lösung:
1) $\cup$ ist ein zweistelliger Operator auf $\mathbb{D}_k$, d.h. es gilt $\cup : \mathbb{D}_k \times \mathbb{D}_k \to \mathbb{D}_k$: Klar.
2) Assoziativität ist auch klar.
3) In der Tat gilt $A \cup \emptyset = \emptyset \cup A = A$ für alle $A \in \mathbb{D}_k$.
4) $A \cup B = B \cup A$ ist auch klar.

(b) $(\mathbb{D}_k, \odot)$ ist ein Monoid mit neuralem Element $\{\varepsilon\}$,

Lösung:
1) $\odot$ ist ein zweistelliger Operator auf $\mathbb{D}_k$, d.h. es gilt $\odot : \mathbb{D}_k \times \mathbb{D}_k \to \mathbb{D}_k$: Klar per Definition.
2) Assoziativität: Funktioniert genau so wie Aufgabe 2c) von Blatt 9, nur mit Mengen statt Wörtern:

$$A \odot (B \odot C) = \diamond_k(A \circ (B \circ C)) = \diamond_k((A \circ B) \circ C) = (A \odot B) \odot C$$

3) Es gilt $A \odot \{\varepsilon\} = A \circ \{\varepsilon\} = A = \{\varepsilon\} \circ A = \{\varepsilon\} \odot A$ für alle $A \in \mathbb{D}_k$.

(c) es gelten die Distributivgesetze

Lösung:
1) $A \odot (B \cup C) = (A \odot B) \cup (A \odot C)$ und

2) $(B \cup C) \odot A = (B \odot A) \cup (C \odot A)$ klar, wegen Blatt 9, Aufgabe 3.

(d) und das neutrale Element bzgl. $\cup$ ist absorbierend für $\odot$.

Lösung:
1) $A \odot \emptyset = \emptyset$ und

2) $\emptyset \odot A = \emptyset$ klar, wegen Blatt 9, Aufgabe 3.