

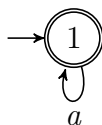
Übungsblatt 3

Aufgabe 1. Sind die folgenden Aussagen wahr oder falsch?

- (a) $L((a \mid bb)^*) = L(a^* \mid (bb)^*)$.
- (b) Zu jedem DFA M_1 mit n Zuständen existiert ein NFA M_2 mit höchstens n Zuständen so, dass $T(M_1) = T(M_2)$.
- (c) Zu jedem NFA M_1 mit n Zuständen existiert ein DFA M_2 mit maximal 2^n Zuständen so, dass $T(M_1) = T(M_2)$.
- (d) Für einen endlichen Automaten M_1 ist $T(M_1)$ stets endlich.
- (e) Jeder reguläre Ausdruck ohne den $*$ -Operator erzeugt eine endliche Sprache.

Lösung zu Aufgabe 1.

- (a) Falsch: z.B. $abb \in L((a \mid bb)^*)$ aber $abb \notin L(a^* \mid (bb)^*)$
- (b) Wahr, denn jeder DFA ist auch ein NFA. Wir können also $M_2 = M_1$ als NFA wählen
- (c) Wahr: Durch Potenzmengenkonstruktion erhalten wir aus einem NFA mit n Zuständen einen DFA mit 2^n Zuständen (die nicht alle vom Startzustand erreichbar sein müssen)
- (d) Falsch, zum Beispiel wird die unendliche Sprache $L(a^*) = \{a^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ von dem folgenden endlichen Automaten erzeugt:



- (e) Wahr (der $+$ -Operator ist hier als Erweiterung von $*$ auch ausgeschlossen). Einen Beweis können wir induktiv über den Aufbau möglicher regulärer Ausdrücke führen.

$L(\emptyset)$, $L(\varepsilon)$ und $L(\alpha)$ für $\alpha \in \Sigma$ sind endlich.

Als Operatoren bleiben noch Vereinigung und Konkatenation. Falls $L(\alpha)$ und $L(\beta)$ endlich sind (Induktionsvoraussetzung), dann sind auch $L(\alpha\beta) = L(\alpha)L(\beta)$ und $L(\alpha|\beta) = L(\alpha) \cup L(\beta)$ endlich.

Aufgabe 2. Gegeben seien folgende NFAs:

1. $M_1 = (\{1, 2, 3\}, \{a, b\}, \delta_1, \{1\}, \{3\})$, wobei δ_1 gegeben ist durch:

δ_1	a	b
1	$\{1, 3\}$	$\{2\}$
2	$\{2\}$	$\{2, 3\}$
3	$\emptyset$	$\{3\}$

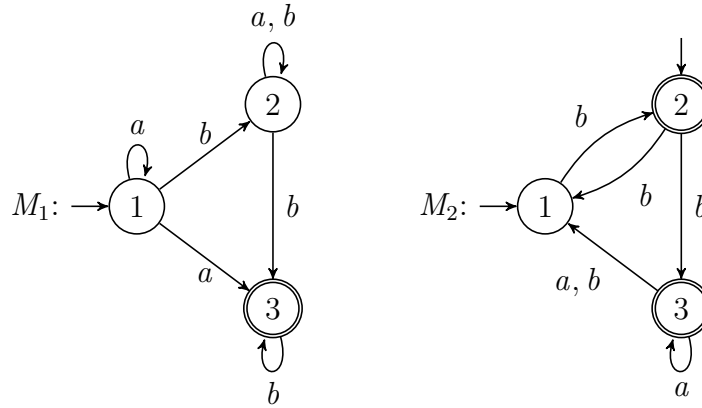
2. $M_2 = (\{1, 2, 3\}, \{a, b\}, \delta_2, \{1, 2\}, \{2, 3\})$, wobei δ_2 gegeben ist durch:

δ_2	a	b
1	$\emptyset$	$\{2\}$
2	$\emptyset$	$\{1, 3\}$
3	$\{1, 3\}$	$\{1\}$

- (a) Zeichnen Sie das zu M_1 bzw. M_2 gehörige Automatendiagramm.
- (b) Geben Sie mittels Potenzmengenkonstruktion einen zu M_1 bzw. M_2 äquivalenten DFA an. Es genügt jeweils, den vom Startzustand erreichbaren Teil anzugeben.

Lösung zu Aufgabe 2.

(a)



(b) **DFA zu M_1**

Wir konstruieren den DFA mittels Potenzmengenkonstruktion. Vom Startzustand nicht erreichbare Zustände werden weggelassen.

Sei $Z = \{1, 2, 3\}$ die Menge der Zustände von M_1 und $S = \{1\}$ die Menge der Startzustände von M_1 .

Sei $M'_1 = (2^Z, \{a, b\}, \delta'_1, S, F)$ der DFA zu M_1 .

Beachte: Die Bezeichnungen der Zustände aus M'_1 sind die Teilmengen der Zustandsmenge Z von M_1 . Somit ist zum Beispiel $S = \{1\}$ keine Menge von Startzuständen von M'_1 , sondern ein einzelner Zustand aus 2^Z .

$$\delta'_1(\{1\}, a) = \delta_1(1, a) = \{1, 3\}$$

$$\delta'_1(\{1\}, b) = \delta_1(1, b) = \{2\}$$

$$\delta'_1(\{1, 3\}, a) = \delta_1(1, a) \cup \delta_1(3, a) = \{1, 3\} \cup \emptyset = \{1, 3\}$$

$$\delta'_1(\{1, 3\}, b) = \delta_1(1, b) \cup \delta_1(3, b) = \{2\} \cup \{3\} = \{2, 3\}$$

$$\delta'_1(\{2, 3\}, a) = \delta_1(2, a) \cup \delta_1(3, a) = \{2\} \cup \emptyset = \{2\}$$

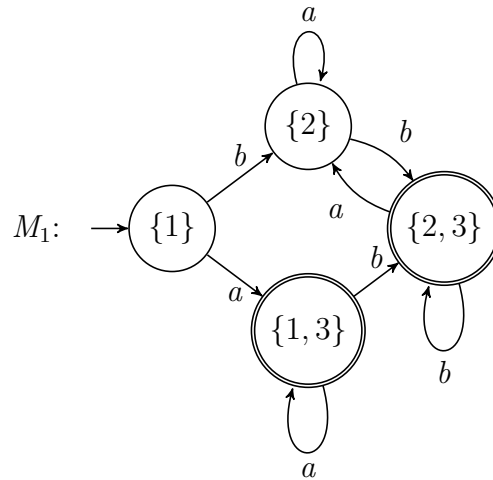
$$\delta'_1(\{2, 3\}, b) = \delta_1(2, b) \cup \delta_1(3, b) = \{2, 3\} \cup \{3\} = \{2, 3\}$$

$$\delta'_1(\{2\}, a) = \delta_1(2, a) = \{2\}$$

$$\delta'_1(\{2\}, b) = \delta_1(2, b) = \{2, 3\}$$

Nun bestimmen wir noch F , die Menge der Endzustände des DFA. Allgemein gilt $F = \{Y \subseteq Z \mid Y \cap E \neq \emptyset\}$. Dabei ist Z ist die Zustandsmenge des NFA, E die Menge seiner Endzustände.

Für M_1 ergibt sich $F = \{\{3\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$ (alle Teilmengen von $\{1, 2, 3\}$, die das Element 3 enthalten). Vom Startzustand aus erreichbar sind davon die Zustände $\{1, 3\}$ und $\{2, 3\}$.



DFA zu M_2

Sei $Z = \{1, 2, 3\}$ die Menge der Zustände von M_2 und $S = \{1, 2\}$ die Menge der Startzustände von M_2 .

Sei $M'_2 = (2^Z, \{a, b\}, \delta'_2, S, F)$ der DFA zu M_2 .

$$\delta'_2(\{1, 2\}, a) = \delta_2(1, a) \cup \delta_2(2, a) = \emptyset \cup \emptyset = \emptyset$$

$$\delta'_2(\{1, 2\}, b) = \delta_2(1, b) \cup \delta_2(2, b) = \{2\} \cup \{1, 3\} = \{1, 2, 3\}$$

$$\delta'_2(\{1, 2, 3\}, a) = \delta_2(1, a) \cup \delta_2(2, a) \cup \delta_2(3, a) = \emptyset \cup \emptyset \cup \{1, 3\} = \{1, 3\}$$

$$\delta'_2(\{1, 2, 3\}, b) = \delta_2(1, b) \cup \delta_2(2, b) \cup \delta_2(3, b) = \{2\} \cup \{1, 3\} \cup \{1\} = \{1, 2, 3\}$$

$$\delta'_2(\{1, 3\}, a) = \delta_2(1, a) \cup \delta_2(3, a) = \emptyset \cup \{1, 3\} = \{1, 3\}$$

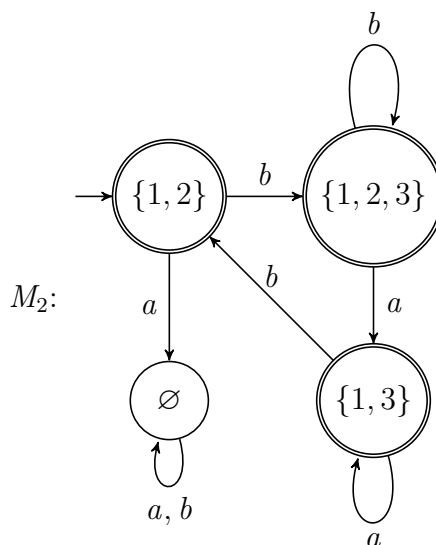
$$\delta'_2(\{1, 3\}, b) = \delta_2(1, b) \cup \delta_2(3, b) = \{2\} \cup \{1\} = \{1, 2\}$$

$$\delta'_2(\emptyset, a) = \emptyset$$

$$\delta'_2(\emptyset, b) = \emptyset$$

Für M_2 ergibt sich $F = \{\{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$ (alle Teilmengen von $\{1, 2, 3\}$, die 2 oder 3 enthalten).

Vom Startzustand aus erreichbar sind davon die Zustände $\{1, 2\}$, $\{1, 3\}$ und $\{1, 2, 3\}$.



Aufgabe 3. Geben Sie zu jeder der folgenden Sprachen einen regulären Ausdruck an.

- (a) $L_1 = \{w \in \{a, b\}^* \mid \text{Das Wort } w \text{ enthält mindestens ein } b.\}$
- (b) $L_2 = \{w \in \{a, b\}^+ \mid \text{Der erste und letzte Buchstabe in } w \text{ stimmen überein.}\}$
- (c) $L_3 = \{a^n b^m c^\ell \mid n \geq 0, m \geq 1, \ell \geq 2\}$

Lösung zu Aufgabe 3.

- (a) $L_1 = L(a^*b(a|b)^*)$

Erklärung: Ein Wort w , dass mindestens ein b enthält, lässt sich aufteilen in $w = ubv$, wobei

- (i) $u \in \{a^k \mid k \geq 0\}$ der Teil des Worts w vor dem ersten b (der also nur aus a 's besteht) ist, und
- (ii) $v \in \{a, b\}^*$ der Teil des Wortes w ist, der auf das erste b folgt (bestehend aus beliebig vielen a 's und b 's).

Ein alternativer regulärer Ausdruck ist $(a|b)^*b(a|b)^*$.

(b) $L_2 = L(a \mid b \mid a(a|b)^*a \mid b(a|b)^*b)$

Erklärung: Hier unterscheiden wir drei Fälle:

- (i) $|w| = 1$,
- (ii) $|w| \geq 2$ und w beginnt und endet mit a ,
- (iii) $|w| \geq 2$ und w beginnt und endet mit b .

Fall (i) erfassen wir mit dem regulären Ausdruck $a|b$.

In Fall (ii) lässt sich w also schreiben als $w = axa$ mit $x \in \{a, b\}^*$, diesen Fall erfassen wir mit dem regulären Ausdruck $a(a|b)^*a$.

In Fall (iii) lässt sich w also schreiben als $w = bxb$ mit $x \in \{a, b\}^*$, diesen Fall erfassen wir mit dem regulären Ausdruck $b(a|b)^*b$.

(c) $L_3 = L(a^*bb^*ccc^*)$ **Erklärung:**

Die Sprache $\{a^n \mid n \geq 0\}$ lässt sich als regulärer Ausdruck a^* schreiben.

Die Sprache $\{b^m \mid m \geq 1\}$ lässt sich durch den regulären Ausdruck bb^* darstellen. Alternativ kann man b^+ verwenden, da $L(bb^*) = L(b^+)$.

Die Sprache $\{c^k \mid k \geq 2\}$ lässt sich durch den regulären Ausdruck ccc^* (oder alternativ: cc^+) darstellen.

Die Sprache L_3 ist nun die Konkatenation der Sprachen $\{a^n \mid n \geq 0\}$, $\{b^m \mid m \geq 1\}$ und $\{c^k \mid k \geq 2\}$.

Aufgabe 4. Beweisen Sie formal, dass $L(a \mid b \mid (a^* \mid b^*)^*) = \{a, b\}^*$.

Lösung zu Aufgabe 4. Zu zeigen sind die beiden Inklusionen $L(a \mid b \mid (a^* \mid b^*)^*) \subseteq \{a, b\}^*$ und $\{a, b\}^* \subseteq L(a \mid b \mid (a^* \mid b^*)^*)$.

$L(a \mid b \mid (a^* \mid b^*)^*) \subseteq \{a, b\}^*$: Diese Inklusion ist „trivial“.

$(a \mid b \mid (a^* \mid b^*)^*)$ ist ein regulärer Ausdruck über dem Alphabet $\Sigma = \{a, b\}$, damit ist die Sprache, die von $(a \mid b \mid (a^* \mid b^*)^*)$ dargestellt wird, eine Teilmenge von $\Sigma^* = \{a, b\}^*$.

$\{a, b\}^* \subseteq L(a \mid b \mid (a^* \mid b^*)^*)$: Nach Definition der Semantik eines regulären Ausdrucks ist $L(a \mid b \mid (a^* \mid b^*)^*) = L(a) \cup L(b) \cup L((a^* \mid b^*)^*)$. Weiterhin ist $L((a^* \mid b^*)^*) = (L(a^*) \cup L(b^*))^*$, wobei $L(a^*) = (L(a))^* = \{a^k \mid k \geq 0\}$ und

$L(b^*) = (L(b))^* = \{b^n \mid n \geq 0\}$. Da $\{a, b\} \subseteq \{a^k, b^n \mid k \geq 0, n \geq 0\}$ folgt $\{a, b\}^* \subseteq \{a^k, b^n \mid k \geq 0, n \geq 0\}^*$. Insgesamt gilt nun also

$$\begin{aligned} \{a, b\}^* &\subseteq \{a^k, b^n \mid k \geq 0, n \geq 0\}^* = (L(a^*) \cup L(b^*))^* = L((a^* \mid b^*)^*) \\ &\subseteq L((a^* \mid b^*)^*) \cup L(a) \cup L(b) = L(a \mid b \mid (a^* \mid b^*)^*) \end{aligned}$$

und somit die Behauptung.