Universität Siegen
Lehrstuhl Theoretische Informatik
Markus Lohrey

Übungsblatt 4

Aufgabe 1.
Sind die folgenden Aussagen wahr oder falsch?

(a) Wenn L eine reguläre Sprache ist und $u, v \in L$, dann gilt $uv \in L$.

(b) Wenn L eine reguläre Sprache ist, dann ist auch die Menge $\mathrm{Pref}(L)$ aller Präfixe von Wörtern aus L regulär.

(c) Wenn L eine reguläre Sprache ist, dann existiert ein NFA mit genau einem Startzustand und genau einem Endzustand, der L erkennt.

(d) Wenn K und L regulär sind, dann ist auch $K \setminus L$ regulär.

(e) Wenn L^* regulär ist, dann ist auch L regulär.

(f) Wenn L regulär ist, dann ist auch $\{w^r \mid w \in L\}$ regulär, wobei wenn $w = a_1 \dots a_n$ gilt, dann ist $w^r = a_n \dots a_1$ (siehe Blatt 2, Aufgabe 1).

(g) Für jede Sprache L sind $L \cap \overline{L}$ und $L \cup \overline{L}$ regulär.

Lösung zu Aufgabe 1.

(a) falsch, sei z.B. $L = L(a|b)$, dann ist $a \in L, b \in L$ aber $ab \notin L$

(b) wahr

Begründung

Sei M ein DFA für die reguläre Sprache L und F die Endzustandsmenge von M. Wir konstruieren aus M einen DFA für die Sprache $\mathrm{Pref}(L)$ indem wir die Endzustandsmenge F um alle Zustände erweitern, von denen aus ein Endzustand aus F erreichbar ist. Somit werden im neuen Automaten alle Wörter akzeptiert, die sich zu einem Wort aus L verlängern lassen. Somit akzeptiert der modifizierte DFA genau die Sprache $\mathrm{Pref}(L)$ und folglich ist $\mathrm{Pref}(L)$ regulär.

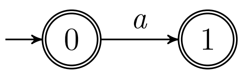
Beachten Sie, dass hier die Sprache $\mathrm{Pref}(L)$ auch den leeren Präfix ε enthält. Wenn man nur nicht-leere Präfixe haben möchte, so muss man zusätzlich einen neuen, nicht-akzeptierenden Anfangszustand hinzufügen, der keine eingehenden Transitionen hat und zu den gleichen Zuständen ausgehende Transitionen hat wie der ursprüngliche Anfangszustand.

(c) wahr, wenn ε-Übergänge erlaubt sind oder $\varepsilon \notin L$ gilt (sonst falsch)

Begründung

Sei M ein NFA, der die reguläre Sprache L erkennt. M hat möglicherweise mehrere Anfangs- und Endzustände. Man fügt nun einen neuen, einzelnen Anfangszustand hinzu, der ausgehende ε-Übergange zu allen ursprünglichen Anfangszuständen hat. Außerdem fügt man einen neuen, einzelnen Endzustand hinzu, so dass aus den alten Endzuständen ε-Übergange in den neuen Endzustand führen. Dieser Automat erkennt ebenfalls L und hat nur einen Anfangs- und Endzustand.

Ohne ε-Übergange gilt die Behauptung im Allgemeinen nicht. Betrachte z.B. die reguläre Sprache $L = \{\varepsilon, a\}$.



Für diese Sprache gibt es keinen NFA ohne ε-Übergange mit nur einem Endzustand.

Falls die Sprache L das leere Wort ε nicht enthält ($\varepsilon \notin L$), dann ist die Behauptung wiederum auch ohne ε-Übergange wahr. Man modifiziert in diesem Fall den NFA so, dass ein neuer, einzelner (nicht-akzeptierender) Anfangszustand hinzugefügt wird, der keine eingehenden Transitionen hat und zu den gleichen Zuständen ausgehende Transitionen hat wie alle ursprünglichen Anfangszustände. Da der Automaten ein NFA ist, kann der neue Anfangszustand möglicherweise viele ausgehende Transitionen mit gleichen Buchstaben haben. Außerdem erzeugt man einen neuen, einzelnen Endzustand, der keine ausgehenden Transitionen hat. Für jeden Übergang, der im ursprünglichen NFA in einen Endzustand geführt hat, fügen wir nun einen zusätzlichen Übergang vom gleichen Zustand hinzu, der in den neuen Endzustand führt.

Bemerkung: Mittels Potenzmengenkonstruktion bekommen wir aus jedem NFA einen DFA, der nur einen Anfangszustand hat. Da jeder DFA auch ein NFA ist, ist die erste Bedingung (genau ein Startzustand) also immer erfüllbar.

(d) wahr

Begründung

Aus der Vorlesung ist bekannt, dass für reguläre Sprachen L_1, L_2 auch $L_1 \cap L_2$ und $\overline{L_1}$ (Komplement) regulär sind. Außerdem gilt

$$\begin{aligned} K \setminus L =& \{w \in \Sigma^* \mid w \in K \wedge w \notin L\} \\ =& \{w \in \Sigma^* \mid w \in K \wedge w \in \overline{L}\} \\ =& K \cap \overline{L}. \end{aligned}$$

$K \setminus L$ ist äquivalent zu $K \cap \overline{L}$ und somit auf Grund der oben genannten Abschlusseigenschaften regulär.

(e) falsch

Begründung

Sei $L = \{a^n b^n \mid n \geq 0\} \cup \{a, b\}$. L ist nicht regulär. In der Vorlesung wird später mit Hilfe des Pumping Lemmas bewiesen, dass $\{a^n b^n \mid n \geq 0\}$ nicht regulär ist und der gleiche Beweis funktioniert auch für L.

Aus $a, b \in L$ folgt $L^* = L((a|b)^*)$, d.h. L^* enthält alle Wörter über dem Alphabet $\{a, b\}$ und diese Sprache ist regulär.

(f) wahr

Begründung

Wir konstruieren aus einem endlichen Automaten M für L einen neuen nicht-deterministischen Automaten für $\{w^r \mid w \in L\}$ und zeigen so, dass $\{w^r \mid w \in L\}$ regulär ist. Dazu modifizieren wir M so, dass die Start- und Endzustände vertauscht werden und zusätzliche alle Übergänge umgekehrt werden. Für jedes Wort w welches von M akzeptiert wird, gilt nun, dass w^r vom modifizierten Automaten akzeptiert wird. Man beachte, dass selbst wenn der ursprüngliche Automat ein DFA war, der resultierende Automat auf Grund der Umkehrung der Transitionen im Allgemeinen ein NFA ist.

(g) wahr, denn es gilt stets $L \cap \overline{L} = \varnothing$ und $L \cup \overline{L} = \Sigma^*$.

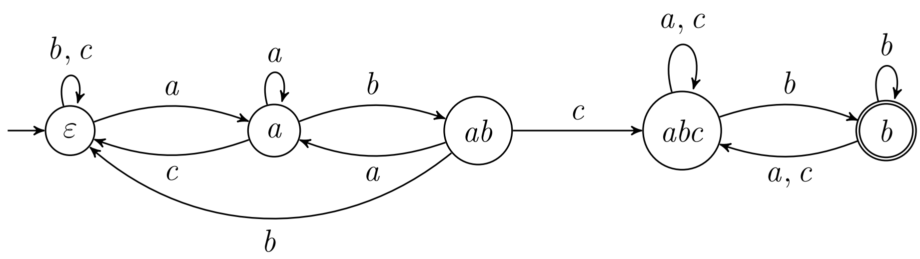
Aufgabe 2. Geben Sie endliche Automaten und reguläre Ausdrücke an, die die folgenden Sprachen über dem Alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$ erkennen bzw. definieren.

(a) $\{w \in \Sigma^* \mid w$ endet mit b und enthält das Teilwort $abc\}$.

(b) $\{w \in \Sigma^* \mid |w|$ ist gerade$\}$.

(c) $\{w \in \Sigma^* \mid w$ enthält nicht das Teilwort $aba\}$.

Lösung zu Aufgabe 2. (a) $L = L((a|b|c)^* abc(a|b|c)^* b)$

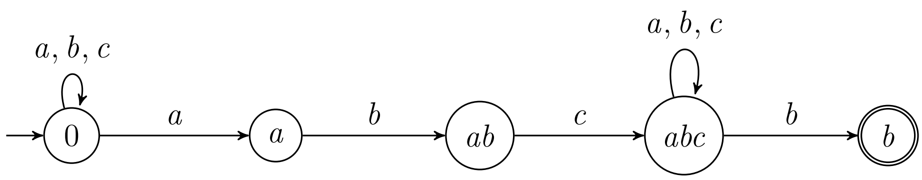


Erklärung

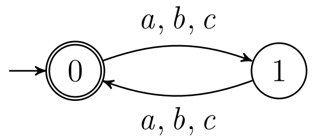
Wir verwenden die Zustände ε, a, ab, und abc, um festzuhalten, welchen maximalen Präfix von abc wir derzeit eingelesen haben (die Grundidee ist die gleiche wie bei Übungsblatt 2, Aufgabe 3(a)).

Ist der Zustand abc erreicht, wird anschließend noch unterschieden ob das Wort mit b endet.

Alternativer NFA:



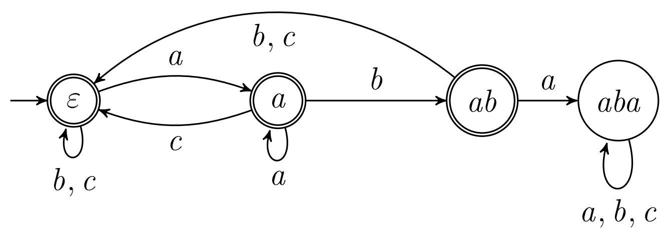
(b) $L = L((aa|ab|ac|ba|bb|bc|ca|cb|cc)^*)$
Alternativ: $L = L(((a|b|c)(a|b|c))^*)$



Erklärung

Im regulären Ausdruck werden alle möglichen Paare von Symbolen beliebig oft wiederholt, um alle Wörter gerader Länge zu erhalten. Im Automaten verwenden wir zwei Zustände 0 und 1 um die Länge modulo 2 zu zählen.

(c) $L = L((b|c|aa^*bb|aa^*bc|aa^*c)^*(aa^*b|aa^*|\varepsilon))$



Erklärung

Ähnlich wie bei (a) verwenden wir die Zustände ε, a, ab und aba um festzuhalten, welchen maximalen Präfix von aba wir derzeit eingelesen haben, bzw. ob das Wort bereits aba enthält.

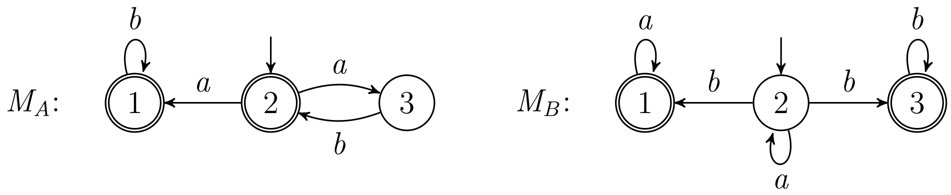
Im Gegensatz zu (a) sollen nur Wörter akzeptiert werden, die aba nicht enthalten, daher sind alle Zustände außer aba Endzustände.

Einen passenden regulären Ausdruck können wir mit dem Verfahren zur Umwandlung eines Automaten in einen regulären Ausdruck erzeugen, dies ist allerdings sehr aufwendig.

Alternativ können wir das sog. "State Elimination" Verfahren anwenden und erhalten damit genau den oben angegebenen regulären Ausdruck. Dieses wird z.B. in `https://courses.cs.washington.edu/courses/cse311/14sp/kleene.pdf` beschrieben.

Insgesamt ist es eher schwierig, einen regulären Ausdruck zu finden, wenn man ein Teilwort nicht haben möchte. Die Idee des oben stehenden Ausdrucks ist, dass im ersten Teil Wiederholungen erzeugt werden, so dass nach jedem a-Block entweder ein c kommt (aa^*c) oder, falls ein b folgt, so folgen direkt zwei b's (aa^*bb) oder wiederum ein c (aa^*bc). Somit wird vermieden, dass aba entsteht. Der hintere Teil des regulären Ausdrucks beschreibt, wie die letzten Zeichen eines Wortes aus L aussehen müssen. Entweder endet das Wort ohne einen echten Präfix von aba, so kann dies schon im ersten Teil erzeugt werden und im zweiten Teil kann man das ε verwenden. Oder man endet mit einem Wort der Form aa^* oder aa^*b. Diese Teilwörter lassen sich im ersten Teil nicht erzeugen, da sie sonst zu aba erweitert werden könnten. Man beachte, dass diese 3 Fälle genau den akzeptierenden Zuständen des Automaten entsprechen.

Aufgabe 3. Gegeben sind die folgenden NFAs M_A, M_B.



Konstruieren Sie NFAs, die die folgenden Sprachen erkennen:

(a) $T(M_A) \cdot T(M_B)$ (Konkatenation)

(b) $T(M_B)^*$

(c) $T(M_A)^+$

(d) $T(M_A) \cap T(M_B)$ (Kreuzproduktautomat)

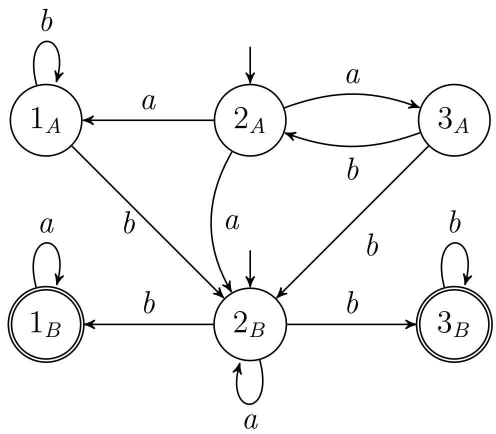
(e) $T(M_A) \cup T(M_B)$

Lösung zu Aufgabe 3. (a) $T(M_A) \cdot T(M_B)$

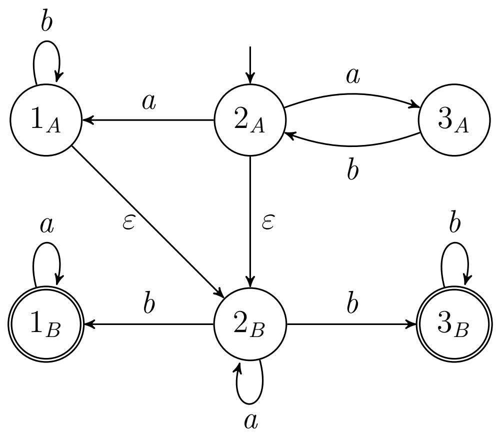
Wir verwenden das Verfahren aus der Vorlesung.

Für alle Übergänge zu Endzuständen von M_A fügen wir Übergänge zu den Startzuständen von M_B hinzu.

Da schon der Startzustand von M_A ein Endzustand ist, ist auch der Startzustand von M_B ein Startzustand im konstruierten Automaten.



Falls ε-Übergänge erlaubt wären (was wir im Allgemeinen <u>nicht</u> zulassen), können wir einen etwas einfacheren Automaten konstruieren:



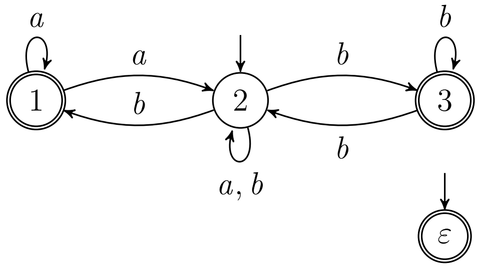
(b) $T(M_B)^*$: Wir verwenden das Verfahren aus der Vorlesung.

Für alle Übergänge zu Endzuständen von M_B fügen wir Übergänge zu den Startzuständen von M_B hinzu.

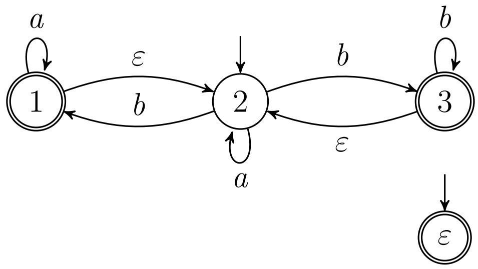
Da der Startzustand von M_B kein Endzustand ist fügen wir einen neuen Endzustand hinzu, um auch das leere Wort zu erkennen.

Die Übergänge die wir neu hinzufügen sind:

- $1 \xrightarrow{a} 2$
- $2 \xrightarrow{b} 2$
- $3 \xrightarrow{b} 2$



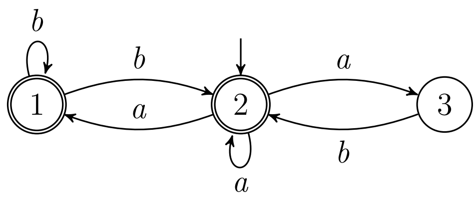
Alternativ, falls ε-Übergänge erlaubt wären, könnten wir den Automaten für $T(M_B)^*$ konstruieren, indem wir von jedem Endzustand einen ε-Übergang in den Startzustand hinzufügen:



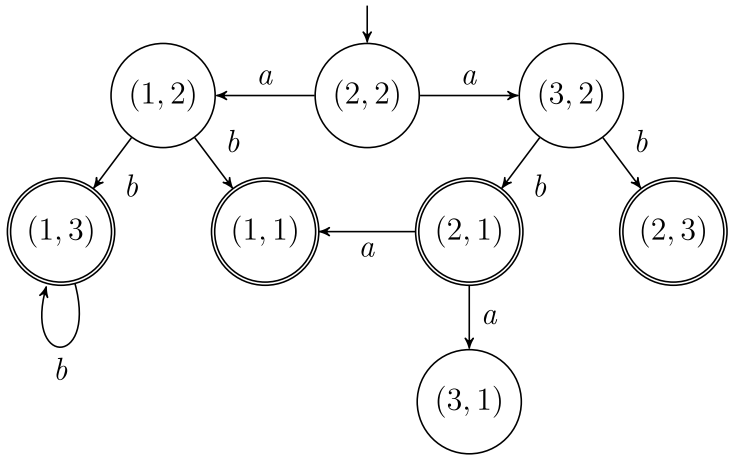
(c) $T(M_A)^+ = T(M_A) \cdot T(M_A)^* = \{w_1 \dots w_n \mid n \geq 1,\ w_i \in T(M_A) \text{ für alle } i\}$
Da $\varepsilon \in T(M_A)$ gilt $T(M_A)^+ = T(M_A) \cdot T(M_A)^* = T(M_A)^*$ und somit können wir das gleiche Verfahren anwenden wie bei (b).

Die neuen Übergänge sind:

- $1 \xrightarrow{b} 2$
- $2 \xrightarrow{a} 2$



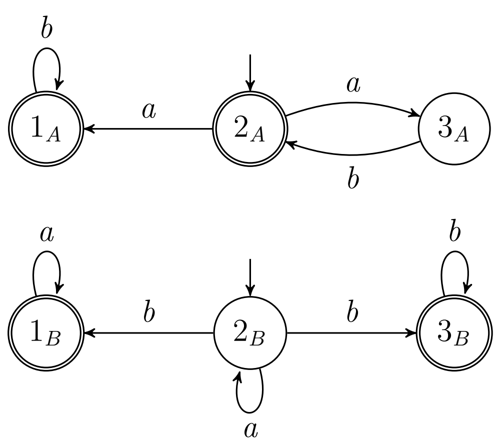
(d) $T(M_A) \cap T(M_B)$
Es folgt der Kreuzproduktautomat, wie in der Vorlesung beschrieben:



Mit Blick auf beide Automaten M_A und M_B und die entsprechenden regulären Ausdrücke $(ab)^* \mid (ab)^*ab^*$ und $a^*ba^* \mid a^*bb^*$ (siehe dazu Übungsblatt 2, Aufgabe 4) sehen wir, dass nur Wörter der Form ab, aba und abb^* von beiden Ausdrücken erkannt werden.

Wir können leicht verifizieren, dass dies genau die Wörter sind, die der konstruierte Automat akzeptiert.

(e) $T(M_A) \cup T(M_B)$
Hier können wir einfach beide Automaten kombinieren ohne neue Übergänge hinzuzufügen, da NFAs mehrere Startzustände haben können.



Aufgabe 4. Sei L_0 eine Sprache über einem endlichen Alphabet Σ, wobei es zu jedem $a \in \Sigma$ ein Wort $w \in L_0$ gebe mit $w = av$, $v \in \Sigma^+$. Sei L_i für $i \geq 1$ definiert durch

$$L_i = \{h(w) \mid w \in L_{i-1}\}^*, \quad \text{wobei } h(w) = \begin{cases} \varepsilon, & \text{falls } w = \varepsilon \\ v, & \text{falls } w = va, v \in \Sigma^*, a \in \Sigma \end{cases}$$

Zeigen Sie: Die resultierende Sprache $L = \lim_{i\to\infty} L_i$ ist regulär.
Hinweis: Zeigen Sie zunächst, dass das Verfahren terminiert, also dass es ein $n \geq 1$ gibt mit $L_n = L_{n+1}$. Danach müssen Sie $L = L_n$ betrachten.

Lösung zu Aufgabe 4. Sei $a \in \Sigma$ beliebig. Nach Voraussetzung existiert ein $w \in L_0$ mit $w = av$, $v \in \Sigma^+$. Sei $v = v_1 \cdots v_m$, $m \geq 1$, $v_1, \ldots, v_m \in \Sigma$. Dann gilt nach Konstruktion $av_1 \cdots v_{m-1} \in L_1$ bzw. allgemeiner noch $av_1 \cdots v_{m-i} \in L_i$. Dies bedeutet aber $a \in L_m$. Da auch a^l für jedes $l \geq 2$ in L_m liegt (Kleene-Stern), bedeutet das $a \in L_{m+j}$ für jedes $j \geq 0$. Sei im Folgenden m_a die kleinste solche Zahl, für die $a \in L_{m_a}$ gilt.
Sei $n = \max\{m_a | a \in \Sigma\}$ (ist endlich, da Σ endliches Alphabet). Es gilt nach dem bisher Gesagten also $a^l \in L_n$ für jedes $a \in \Sigma$ und $l \geq 0$ (ε ist in allen L_i für $i \geq 1$ enthalten). Dies bedeutet aber, dass $\Sigma^* \subseteq L_{n+1}$ gilt (eigentlich sogar schon für L_n), was wiederum bedeutet $\Sigma^* = L_{n+1}$. Jetzt terminiert das Verfahren und wir erhalten $L_{n+1} = L_{n+2} = \cdots$.
Insgesamt haben wir also gezeigt, dass $\lim_{i\to\infty} L_i = \Sigma^*$ ist. Die Sprache ist somit regulär.