Universität Siegen
Lehrstuhl Theoretische Informatik
Markus Lohrey

Übungsblatt 10

Aufgabe 1. Geben Sie einen Kellerautomaten und eine kontextfreie Grammatik an, die die folgende Sprache akzeptiert:

$$L = \{a^m b^n \mid m, n \geq 0,\ m \neq n\}$$

Lösung zu Aufgabe 1. Grammatik

- $G = (V, \Sigma, P, S)$
- $V = \{S, A, B\}$
- $\Sigma = \{a, b\}$
- $P = \{S \to aSb \mid A \mid B,\ A \to aA \mid a,\ B \to bB \mid b\}$

Über die Regel $S \to aSb$ erzeugen wir Wörter mit gleich vielen a's und b's.

Die Übergänge $S \to A$ und $S \to B$ fügen in der Mitte dann noch ein Wort a^n oder b^n mit $n \geq 1$ ein, so dass am Ende entweder mehr a's oder mehr b's erzeugt wurden.

Kellerautomat

- $M = (Z, \Sigma, \Gamma, \delta, z_0, \#)$
- $Z = \{z_0, z_1, z_2, z_3, s_0, s_1, q_0\}$
- $\Sigma = \{a, b\}$
- $\Gamma = \{\#, A\}$

Dabei ist δ wie folgt definiert:

$$
\begin{aligned}
\delta : (z_0, a, \#) &\to (z_1, \#) && (1)\\
(z_1, a, \#) &\to (z_1, \#) && (1)\\
(z_1, \varepsilon, \#) &\to (z_1, \varepsilon) && (1)\\
\\
(z_0, b, \#) &\to (z_2, \#) && (2)\\
(z_2, b, \#) &\to (z_2, \#) && (2/4)\\
(z_2, \varepsilon, \#) &\to (z_2, \varepsilon) && (2/4)\\
\\
(z_0, a, \#) &\to (z_3, A\#) && (3/4)\\
(z_3, a, A) &\to (z_3, AA) && (3/4)\\
(z_3, b, A) &\to (s_0, \varepsilon) && (3)\\
(s_0, b, A) &\to (s_0, \varepsilon) && (3)\\
(s_0, \varepsilon, A) &\to (s_1, \varepsilon) && (3)\\
(s_1, \varepsilon, A) &\to (s_1, \varepsilon) && (3)\\
(s_1, \varepsilon, \#) &\to (s_1, \varepsilon) && (3)\\
\\
(z_3, b, A) &\to (q_0, \varepsilon) && (4)\\
(q_0, b, A) &\to (q_0, \varepsilon) && (4)\\
(q_0, b, \#) &\to (z_2, \#) && (4)
\end{aligned}
$$

Lassen Sie sich nicht abschrecken von den vielen Transitionen, denn das Prinzip ist einfacher als es aussieht. Wir unterscheiden nichtdeterministisch 4 Typen von Wörtern, die zur Sprache gehören:

(1) a^n für $n \geq 1$

(2) b^n für $n \geq 1$

(3) $a^m b^n$ mit $m, n \geq 1$ und $m > n$

(4) $a^m b^n$ mit $m, n \geq 1$ und $m < n$

Die ersten beiden Fälle (1) und (2) sind einfach, da entweder nur a's oder b's gelesen werden und anschließend kann man das Kellerbodensymbol entfernen.
In den Fällen (3) und (4) wird zu Beginn für jedes gelesene a ein A auf den

Keller gelegt bis das erste b gelesen wird. Anschließend wird im Fall (3) für jedes b ein A entfernt, und dann wechselt man mit einem ε-Übergang in den Zustand s_1 falls weiterhin ein A auf dem Keller liegt (und somit mehr a's als b's gelesen wurden). Der Zustand s_1 leert anschließend den Keller ohne weitere Buchstaben zu lesen. Beachten Sie, dass falls man den ε-Übergang anwendet bevor das Wort zu Ende gelesen wurde, so wird am Ende nicht akzeptiert, da im Zustand s_1 keine weiteren Buchstaben gelesen werden.
Im Fall (4) wird ebenfalls für jedes b ein A vom Keller entfernt, aber anschließend wechselt man in den Zustand z_2, falls man das Kellerbodensymbol # erreicht und ein b gelesen wird (und somit mehr b's als a's gelesen wurden). Im Zustand z_2 werden dann noch beliebig viele b's gelesen bevor man das Kellerbodensymbol entfernt.

Aufgabe 2. Betrachten Sie noch einmal Aufgabe 1 (c) von Blatt 9. Eine kontextfreie Grammatik, die die Sprache $L = \{w \in \{a,b\}^* \mid w = w^r\}$ erzeugt, ist $G = (V, \Sigma, P, S)$ mit $V = \{S\}$, $\Sigma = \{a, b\}$ und

$$P = \{S \to \varepsilon \mid a \mid b \mid aSa \mid bSb\}.$$

Wandeln Sie die Grammatik mit dem Verfahren der Vorlesung (Folie 279) in einen PDA um. Überprüfen Sie, ob ihr Automat richtig arbeitet, indem Sie ihn auf den Eingaben

- $w_1 = abbabba$ und
- $w_2 = abb$

laufen lassen.

Lösung zu Aufgabe 2. Nach dem Verfahren der Vorlesung erhalten wir einen Kellerautomaten $M = (\{z\}, \Sigma, V \cup \Sigma, \delta, z, S)$ mit δ gegeben durch

$$\begin{aligned}\delta(z, \varepsilon, S) &= \{(z, \varepsilon), (z, a), (z, b), (z, aSa), (z, bSb)\},\\ \delta(z, a, a) &= \{(z, \varepsilon)\},\\ \delta(z, b, b) &= \{(z, \varepsilon)\}.\end{aligned}$$

Beachte: Dieser Automat ist deutlich kleiner als der Automat aus der Lösung zu Aufgabe 1 (c). Allerdings arbeitet der PDA weniger intuitiv. Dies liegt daran, dass im Keller des Automaten die Ableitung durch die Grammatik G simuliert wird, wohingegen der Automat aus der Lösung des vorigen Blattes nur eine „Stackphase“, eine „Übergangsphase“ und eine „Löschphase“ hat. Man beachte ferner, dass bei der neuen Konstruktion das Kelleralphabet alle Terminalsymbole enthält. Generell sind Kelleralphabete durch diese Konstruktion größer.

Wir sehen sofort, dass w_1 ein Palindrom ist. Wir haben:

$$\begin{aligned}(z, abbabba, S) &\vdash (z, abbabba, aSa) \vdash (z, bbabba, Sa) \vdash (z, bbabba, bSba)\\ &\vdash (z, babba, Sba) \vdash (z, babba, bSbba) \vdash (z, abba, Sbba)\\ &\vdash (z, abba, abba) \vdash^* (z, \varepsilon, \varepsilon)\end{aligned}$$

Also wird w_1 von M akzeptiert. Für w_2 bekommen wir zum Beispiel

$$(z, abb, S) \vdash (z, abb, aSa) \vdash (z, bb, Sa) \vdash (z, bb, ba) \vdash (z, b, a)$$

Wegen des Nichtdeterminismus müssen wir uns noch überlegen, dass es nicht doch eine Möglichkeit gibt $(z, \varepsilon, \varepsilon)$ zu erhalten: Wir müssen das Eingabewort komplett abarbeiten, daher müssen wir im ersten Schritt einen Übergang nehmen, bei dem S erhalten bleibt und dafür kommt (wegen erstes Zeichen a) nur einer in Frage ($S \to aSa$). Das Wort w_2 hat Länge 3 und wir wissen daher, dass im nächsten Schritt die Mitte gelesen werden muss. Es bleibt daher nur den zu $S \to b$ korrespondierenden Übergang zu nehmen. Obwohl wir bis hierher also stets die sinnvollsten Übergange gewählt haben, bleibt der Automat nun bei (z, b, a) stehen.

Es gäbe zum Beispiel auch die Möglichkeit das Eingabewort komplett abzuarbeiten, wodurch wir (z, ε, bba) erhalten. Hier ist allerdings der Keller nicht leer.

Aufgabe 3. Sei Σ ein beliebiges Alphabet.

(a) Ist das folgende Problem entscheidbar?

Gegeben: Ein nichtdeterministischer Kellerautomat M_1 mit beschränktem Keller (d.h. für jede Konfiguration (z, x, γ) ist $|\gamma| \leq K$ für ein festes K) und ein NFA M_2.
Frage: Gilt $L(M_1) \subseteq L(M_2)$?

(b) Existiert eine kontextfreie, aber nicht reguläre Sprache $L_1 \subseteq \Sigma^*$ und eine reguläre, aber nicht endliche Sprache $L_2 \subseteq \Sigma^*$, so dass $L_1 \cap L_2$ regulär ist?

Lösung zu Aufgabe 3. (a) Sei $M_1 = (Z, \Sigma, \Gamma, \delta, z_0, \#)$. Damit die Inklusion gilt, muss $L(M_1)$ regulär sein. Dies bedeutet aber, dass wir zunächst überprüfen müssen, ob M_1 sich in einen NFA M_1' umwandeln lässt oder nicht. Aber in der Tat: Da die Anzahl der Zustände, sowie nach Voraussetzung auch die Anzahl aller möglichen Kellerinhalte endlich ist (das Kelleralphabet Γ ist ebenfalls endlich) können wir jedes Paar (z, γ) ($z \in Z$, $\gamma \in \Gamma$) mit einem Zustand $q_{z,\gamma}$ eines NFAs kodieren. (*Aufgabe:*

Überlegen Sie sich, wie genau M_1' aussehen muss.) Durch die ε-Übergänge im PDA können ε-Kanten im NFA entstehen, daher müssen wir den resultierenden NFA zunächst ε-frei machen. Dies geht aber (siehe Bemerkung in der Vorlesung). Da wir einen NFA M_1' gefunden haben mit $L(M_1) = L(M_1')$, ist unser Problem entscheidbar genau dann, wenn das Inklusionsproblem für reguläre Sprachen entscheidbar ist. Dies können wir dank der Vorlesung jedoch ebenfalls mit Ja beantworten.

Beachte: Wenn unbeschränkte Kellerinhalte erlaubt wären, ginge dieses Argument nicht. Es ist sogar für reguläre Sprachen möglich PDAs anzugeben, bei denen der Keller bereits unbeschränkt ist.

(b) Ja: Nehme z.B. $L_1 = \{a^n b^n | n \geq 0\}$ und $L_2 = \{a^n | n \geq 1\}$. Der Schnitt beider Sprachen ist leer (und $\varnothing$ ist regulär).

Aufgabe 4. Gegeben sei die kontextfreie Grammatik $G = (V, \Sigma, P, S)$ in Chomsky-Normalform über $\Sigma = \{a, b\}$ mit $V = \{S, X, Y, A, B\}$, wobei P gegeben ist durch:

$$\begin{aligned} S &\to a \mid b \mid AA \mid BB \mid XA \mid YB \\ X &\to AS \\ Y &\to BS \\ A &\to a \\ B &\to b \end{aligned}$$

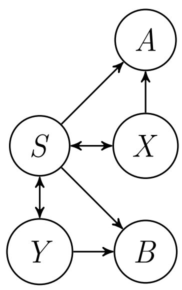
Überprüfen Sie mit dem Algorithmus aus der Vorlesung, ob $L(G)$ endlich ist.

Lösung zu Aufgabe 4. 1. Schritt: Bestimmen der produktiven Variablen:

1. $W = \varnothing$ (intitial)
2. $W = \{A, B\}$, da $(A \to a) \in P$ und $(B \to b) \in P$
3. $W = \{A, B, S\}$, da $(S \to AA) \in P$ und $A \in W$
4. $W = \{A, B, S, X, Y\}$, da $(X \to AS) \in P$ und $(Y \to BS) \in P$ und $A, B, S \in W$

Alle Nicht-Terminale sind produktiv.

2. Schritt: Betrachte den Graphen (W, E) mit Kanten
$E = \{(S, A), (S, B), (S, X), (S, Y), (X, A), (X, S), (Y, B), (Y, S)\}$



Es existiert ein nicht-leerer Zyklus $S \to X \to S$, daher ist $|L(G)| = \infty$.