

Übungsblatt 10

Aufgabe 1 (Catalanzahlen 1). Es sei C die Menge der korrekten Klammerausdrücke (beispielsweise ist $(()) \in C$, aber $() \notin C$). Wie viele korrekte Klammerausdrücke mit n öffnenden Klammern gibt es?

Hinweis. Ermitteln Sie dafür zunächst die Anzahl der Klammerausdrücke, die ebenso viele öffnende wie schließende Klammern verwenden. Welcher Anteil dieser Ausdrücke ist korrekt geklammert?

Anmerkung. Die Zahlen C_0, C_1, C_2, \dots mit $C_i := \{c \in C \mid |c| = 2i\}$ werden auch *Catalanzahlen* genannt.

Aufgabe 2 (Catalanzahlen 2). Es sei T die Menge der gewurzelten, geordneten Bäume unbeschränkten Ranges (der Baum hat also eine explizit deklarierte Wurzel, es wird zwischen dem i -ten und dem j -ten Kind unterschieden, und der Knotengrad kann beliebig groß sein). Wie viele Bäume $t \in T$ gibt es mit n Kanten?

Hinweis. Finden Sie eine Bijektion zwischen den Mengen T und C .

Aufgabe 3 (Catalanzahlen 3). Es sei F die Menge der vollen Binärbäume (es hat also jeder Knoten null oder zwei Kinder). Wie viele Bäume mit n inneren Knoten gibt es?

Hinweis. Finden Sie eine Bijektion zwischen den Mengen F und T .

Anmerkung. Diese Frage könnte auch als *wie viele verschiedene Formen kann ein binärer Suchbaum annehmen?* gestellt werden.

Aufgabe 4 (Catalanzahlen 4). Finden Sie noch mindestens zwei kombinatorische Interpretationen der *Catalanzahlen*. Im Buch *Enumerative Combinatorics 2* von Richard Stanley finden Sie beispielsweise noch 63 nicht genannte.

Aufgabe 5 (Catalanzahlen 5). Ermitteln Sie mittels der Stirling-Approximation der Fakultätszahlen das asymptotische Wachstum der Catalanzahlen.