Universität Siegen
Lehrstuhl Theoretische Informatik
Markus Lohrey und Eric Nöth

Übungsblatt 6

Aufgabe 1 (Konjunktive Normalform)**.** Es sei $F = C_1 \wedge C_2 \wedge \cdots \wedge C_m$ eine aussagenlogische Formel, $F \in 3-\mathrm{KNF}$ mit der Einschränkung, dass in keiner Klausel eine Variable doppelt vorkommt. Beweisen Sie die folgende Aussage: Es gibt eine Belegung der Variablen von F, so dass mindestens 7/8 der Klauseln von F erfüllt sind.

Hinweis. Definieren Sie zunächst dafür die Funktionen $\chi_i(F)$:

$$\chi_i(F) = \begin{cases} 0 & \text{falls } C_i \text{ falsch} \\ 1 & \text{falls } C_i \text{ wahr} \end{cases}$$

Berechnen Sie dann den Erwartungswert der Funktion $X = \sum_{i=1}^{m} \chi_i(F)$ unter zufälliger Belegung der Variablen.

Aufgabe 2. Sei $\mathbb{A}$ die Menge der aussagenlogischen Formeln, $F \in \mathbb{A}$ und $V(F)$ die Menge der Variablen, die in der Formel F vorkommen. Des Weiteren sei die Hilfsfunktion $f' : \mathbb{A} \to \mathrm{SAT} \cap \mathrm{KNF}$ definiert wie auf Folie 99 der Vorlesung. Beweisen Sie das folgende Lemma (auf Folie 100):

Lemma.

1. $f'(F)$ ist stets erfüllbar.
2. Sei σ eine erfüllende Belegung von $f'(F)$ und σ' die Restriktion von σ auf $V(F)$. Dann gilt: $\sigma'(F) = \sigma(v(F))$.
3. Sei $\sigma' : V(F) \to \{0,1\}$ eine beliebige Belegung. Dann existiert eine erfüllende Belegung $\sigma : V(f'(F)) \to \{0,1\}$ von $f'(F)$ mit $\forall x \in V(F) : \sigma'(x) = \sigma(x)$.

Zur Erinnerung. Hier die Definition der Funktion $f' : \mathbb{A} \to \mathrm{SAT} \cap \mathrm{KNF}$:

1. Ist $F = x$, so ist $f'(F) := \mathrm{KNF}(v(x) \Leftrightarrow x)$.
2. Ist $F = A \circ B$ mit $\circ \in \{\Leftrightarrow, \Rightarrow, \vee, \wedge\}$, so ist
$$f'(F) := \mathrm{KNF}\left(v(F) \Leftrightarrow (v(A) \circ v(B))\right) \wedge f'(A) \wedge f'(B).$$
3. Ist $F = \neg A$, so ist
$$f'(F) := \mathrm{KNF}\left(v(F) \Leftrightarrow \neg v(A)\right) \wedge f'(A).$$
Hier enthalten wir nach entsprechender Umformung:
$$f'(F) := (v(F) \vee v(A)) \wedge (\neg v(F) \vee \neg v(A)) \wedge f'(A).$$