

## Übungsblatt 2

### Aufgabe 1.

Bestimmen Sie, ob es sich bei den folgenden Relationen um Funktionen handelt. Geben Sie ggf. an, ob die Funktionen injektiv, surjektiv und/oder bijektiv sind. Geben Sie außerdem für die gefundenen Funktionen das Bild der Funktion an.

- (a)  $R_1 \subseteq (\mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{R}_{\geq 0})$   
 $R_1 = \{(x, y) \mid y = x^2\}$
- (b)  $R_2 \subseteq (\{0, 1, 2, 3, 4\} \times 2^{\{0,1,2,3,4\}})$   
 $R_2 = \{(x, y) \mid y = \{4 - x\}\}$
- (c)  $R_3 \subseteq (\{0, 1, 2, 3, 4\} \times 2^{\{0,1,2,3,4\}})$   
 $R_3 = \{(x, y) \mid y = \{x, 4 - x\}\}$
- (d)  $R_4 \subseteq (\{0, 1, 2, 3, 4\} \times \{0, 1, 2, 3, 4\})$   
 $R_4 = \{(x, y) \mid y \in \{x, 4 - x\}\}$
- (e)  $R_5 \subseteq (\mathbb{R} \times [-1, 1])$   
 $R_5 = \{(x, y) \mid y = \sin(x)\}$
- (f)  $R_6 \subseteq (\mathbb{N}^{\mathbb{N}} \times \mathbb{N})$   
 $R_6 = \{(f, y) \mid y = f(10)\}$
- (g)  $R_7 \subseteq (\text{Menschen} \times \text{weibliche Vornamen})$   
 $R_7 = \{(x, y) \mid y \text{ ist der erste Vorname der biologischen Mutter von } x\}$
- (h)  $R_8 \subseteq (\text{Menschen} \times \text{Himmelskörper})$   
 $R_8 = \{(x, y) \mid x \text{ war auf } y\}$

Hinweise:

- $\mathbb{R}_{\geq 0} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$
- $[-1, 1] = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 \leq x \leq 1\}$
- $\mathbb{N}^{\mathbb{N}} = \{f \mid f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}\}$  (Menge aller Funktionen von  $\mathbb{N}$  nach  $\mathbb{N}$ )

**Aufgabe 2.** Beweisen Sie folgende Aussagen:

- (a) Sei  $f : A \rightarrow B$  eine injektive Funktion. Dann gilt für alle  $A_1, A_2 \subseteq A$ :  
 $f(A_1 \cap A_2) = f(A_1) \cap f(A_2)$
- (b) Sei  $f : A \rightarrow B$  eine bijektive Funktion. Dann ist die Umkehrfunktion  $f^{-1} : B \rightarrow A$  ebenfalls bijektiv.

**Aufgabe 3.** Geben Sie eine Bijektion von  $A$  nach  $B$  an.

- (a)  $A = \{1, 2, 3\}$ ,  $B = \{a, b, c\}$
- (b)  $A$  ist die Menge der natürlichen Zahlen,  $B$  ist die Menge der geraden natürlichen Zahlen
- (c)  $A$  ist die Menge der geraden ganzen Zahlen,  $B$  ist die Menge der ungeraden ganzen Zahlen
- (d)  $A$  ist die Menge der durch  $k$  teilbaren natürlichen Zahlen,  $B$  ist die Menge der durch  $m$  teilbaren natürlichen Zahlen
- (e)  $A = 2^{\mathbb{N}}$ ,  $B = 2^{\mathbb{Z}}$

**Aufgabe 4.** Beweisen Sie, dass die Menge der natürlichen Zahlen  $\mathbb{N}$  nicht gleichmächtig zum Intervall  $[0, 1] = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq 1\}$  ist.