Universität Siegen
Lehrstuhl Theoretische Informatik
Markus Lohrey

Übungsblatt 4

Aufgabe 1.
Bestimmen Sie die Äquivalenzklassen der folgenden Relationen:

(a) $R_1 \subseteq (\mathbb{Z} \times \mathbb{Z})$
$R_1 = \{(a, b) \mid 5|(a - b)\}$

(b) $R_2 \subseteq$ (Menschen in Deutschland $\times$ Menschen in Deutschland)
$R_2 = \{(a, b) \mid a$ und b wohnen im selben Bundesland$\}$

Aufgabe 2.
Bestimmen Sie die reflexiv-transitive Hülle der folgenden Relationen:

(a) $R_1 \subseteq (\{1, 2, 3, 4, 5\} \times \{1, 2, 3, 4, 5\})$
$R_1 = \{(1, 2), (3, 4), (4, 3), (2, 2), (2, 5), (3, 1)\}$

(b) $R_2 \subseteq$ (Menschen $\times$ Menschen)
$R_2 = \{(a, b) \mid a$ ist das leibliche Kind von $b\}$

Aufgabe 3.
Beweisen Sie die folgenden Aussagen mittels vollständiger Induktion:

(a) Sei A eine Menge mit n Elementen. Dann hat die Potenzmenge 2^A genau 2^n Elemente.

(b) $\sum_{k=1}^{n} (2k - 1)^2 = \frac{n \cdot (2n-1) \cdot (2n+1)}{3}$

(c) $\sum_{k=1}^{2^n - 1} \frac{1}{k} \geq \frac{n}{2}$

(d) $3|(n^3 - n)$

Aufgabe 4.
Im Folgenden wird mittels vollständiger Induktion bewiesen, dass in einer Gruppe mit n Menschen alle die gleiche Augenfarbe haben. Finden Sie den Fehler im Beweis.

Induktionsanfang ($n = 1$)
In einer Gruppe mit einem Menschen haben offensichtlich alle die gleiche Augenfarbe.

Induktionsschritt
Wir nehmen an, dass alle Menschen in einer Gruppe der Größe n die gleiche Augenfarbe haben und beweisen, dass die Aussage dann auch für Gruppen der Größe $n + 1$ gilt.
Dazu nummerieren wir die $n + 1$ Menschen beliebig durch. Nach Induktionsvoraussetzung hat die Gruppe bestehend aus den Menschen mit den Nummern 1 bis n die gleiche Augenfarbe. Das gleiche gilt für die Gruppe bestehend aus den Menschen mit den Nummern 2 bis $n+1$. Zu beiden Mengen gehört zum Beispiel der Mensch mit der Nummer 2. Folglich haben alle n+1 Menschen die selbe Augenfarbe.