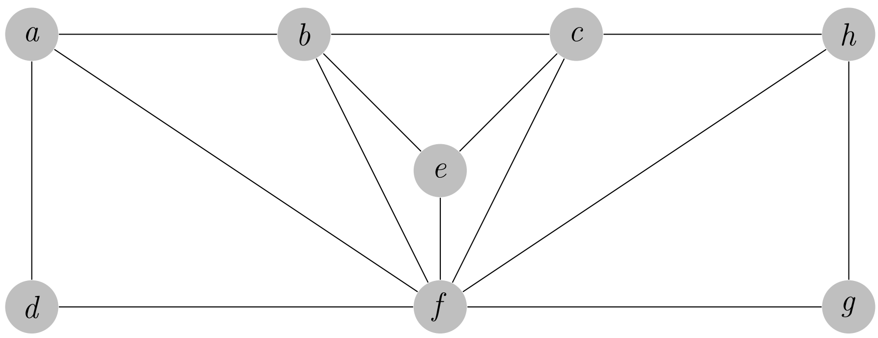
Übungsblatt 8

Aufgabe 1. Beweisen Sie:
Sei $G = (V, E)$ ein zusammenhängender Graph und sei jeder Knoten $v \in V$ vom Grad höchstens 2 ($\forall v \in V : \ d_G(v) \leq 2$). Dann ist G entweder ein einzelner Knoten, der P_n oder der C_n.
Hinweis: Versuchen Sie vollständige Induktion über die Anzahl der Kanten.

Aufgabe 2. Gegeben folgender Graph
und das Matching $M = \{\{h, f\}, \{c, e\}, \{a, d\}\}$:



(a) Ist M maximal/perfekt?

(b) Finden Sie einen erweiternden Weg, der die Kanten $\{h, f\}$ und $\{c, e\}$ enthält?

(c) Geben Sie ggf. das aus dem resultierenden Weg entstehende Matching an. Ist dieses Matching maximal/perfekt?

Aufgabe 3. Bestimmen Sie die Anzahl der perfekten Matchings im bipartiten Graphen $K_{n,n}$ und im vollständigen Graphen K_{2n}.

Aufgabe 4. Zeichnen Sie den Graph
$G = (V, E)$ mit $V = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $E = \{\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 5\}, \{2, 4\}, \{2, 5\}, \{3, 4\}, \{3, 5\}\}$.

(a) Enthält G einen Eulerweg / Eulerkreis?

(b) Sei $G' = (V \cup \{6\}, E \cup \{\{1, 6\}, \{2, 6\}\})$.
Enthält G' einen Eulerweg / Eulerkreis?

(c) Sei $G'' = (V \cup \{6,7\}, E \cup \{\{1,6\},\{2,6\},\{3,7\},\{4,7\}\})$.
Enthält G'' einen Eulerweg / Eulerkreis?

Aufgabe 5. Bestimmen Sie ein Kriterium, so dass ein Graph $G = (V, E)$ einen Eulerweg, aber keinen Eulerkreis hat.

Aufgabe 6. Beweisen oder widerlegen Sie: In jedem Graph $G = (V, E)$ mit Eulerkreis gibt es eine Menge von echten Kreisen, so dass jede Kante $e \in E$ in genau einem dieser Kreise liegt.

Aufgabe 7. Sei G ein Graph mit n Knoten.

(a) Was ist die kleinste Anzahl an Kanten m die man braucht, so dass G zusammenhängend ist?

(b) Wieviele Kanten muss G mindestens haben, so dass G in jedem Fall zusammenhängend ist?