

Übungsblatt 9

Aufgabe 1.

1. Beweisen Sie: K_n besitzt für $n \geq 3$ einen Hamiltonkreis.
2. Sei G ein Graph mit $n \geq 3$ Knoten. Wie viele Kanten muss G mindestens enthalten, damit G auf jeden Fall einen Hamiltonkreis besitzt?

Aufgabe 2. Das Komplement eines Graphen $G = (V, E)$ ist der Graph $\overline{G} = (V, \overline{E})$ mit $\{u, v\} \in \overline{E}$ genau dann, wenn $\{u, v\} \notin E$. Ein Graph G heißt selbstkomplementär, wenn G isomorph zu \overline{G} ist. Beweisen Sie, dass in jedem selbstkomplementären Graphen mit n Knoten gilt: $n \equiv 0 \pmod{4}$ oder $n \equiv 1 \pmod{4}$.

Aufgabe 3. Beweisen Sie: Ist (G, \circ) eine Gruppe und $a, b \in G$, so gibt es ein eindeutiges $c \in G$ mit $a \circ c = b$.

Aufgabe 4. Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen: In jeder Gruppe (G, \circ) gilt für alle $a, b \in G$

1. $a \circ a = a \circ b \Rightarrow a = b$
2. $a \circ a = b \circ b \Rightarrow a = b$
3. $a^5 = a \Rightarrow a^4 = a$
4. $a^5 = e$ und $a^4 = e \Rightarrow a = e$

Aufgabe 5. Sei (G, \circ) eine Gruppe mit dem neutralen Element e . Beweisen Sie:

1. Ist für alle $a \in G$ die Gleichung $a \circ a = e$ erfüllt, so ist G abelsch.
2. Ist G zyklisch, so ist G abelsch.

Aufgabe 6. Zeigen Sie, dass es eine Gruppe G und Elemente $a, b \in G$ gibt, so dass die Gleichung $(ab)^{-1} = a^{-1}b^{-1}$ nicht erfüllt ist.