

Übungsblatt 10

Aufgabe 1. Geben Sie die Verknüpfungstabellen der folgenden Monoide an und bestimmen Sie, welches Monoid eine Gruppe ist:

1. S_3
2. $(\mathbb{Z}_5 \setminus \{0\}, \cdot)$
3. (\mathbb{Z}_4, \cdot)

Aufgabe 2.

1. Geben Sie alle Untergruppen der folgenden Gruppen an:
 - (a) S_3
 - (b) $(\mathbb{Z}_8, +)$
2. Finden Sie, falls möglich, zu den beiden Gruppen je zwei Untergruppen, deren Vereinigung keine Untergruppe ist.

Aufgabe 3. Berechnen Sie:

1. $5^{40} \pmod{3}$
2. $(77 \cdot 34) + (85 \cdot 44) \pmod{4}$
3. $2^{3^4} \pmod{5}$

Aufgabe 4. Beweisen Sie: Es ist $(a + b)^5 \equiv a^5 + b^5 \pmod{5}$ für alle $a, b \in \mathbb{Z}$.

Aufgabe 5. Zeigen Sie, dass φ mit

$$\varphi : (\mathbb{Z}, +) \rightarrow (m\mathbb{Z}, +), \varphi(x) = mx$$

für $m \in \mathbb{N}$ ein Isomorphismus ist.

Aufgabe 6. Betrachten Sie die Untergruppen von S_3 aus Aufgabe 1. Bestimmen Sie die Links- und Rechtsnebenklassen dieser Untergruppen und bestimmen Sie die Normalteiler von S_3 .