

## Übungsblatt 10

**Aufgabe 1.** Geben Sie die Verknüpfungstabellen der folgenden Monoide an und bestimmen Sie, welches Monoid eine Gruppe ist:

1.  $S_3$
2.  $(\mathbb{Z}_5 \setminus \{0\}, \cdot)$
3.  $(\mathbb{Z}_4, \cdot)$

**Aufgabe 2.**

1. Geben Sie alle Untergruppen der folgenden Gruppen an:
  - (a)  $S_3$
  - (b)  $(\mathbb{Z}_8, +)$
2. Finden Sie, falls möglich, zu den beiden Gruppen je zwei Untergruppen, deren Vereinigung keine Untergruppe ist.

**Aufgabe 3.** Berechnen Sie:

1.  $5^{40} \pmod{3}$
2.  $(77 \cdot 34) + (85 \cdot 44) \pmod{4}$
3.  $2^{3^4} \pmod{5}$

**Aufgabe 4.** Beweisen Sie: Es ist  $(a + b)^5 \equiv a^5 + b^5 \pmod{5}$  für alle  $a, b \in \mathbb{Z}$ .

**Aufgabe 5.** Zeigen Sie, dass  $\varphi$  mit

$$\varphi : (\mathbb{Z}, +) \rightarrow (m\mathbb{Z}, +), \varphi(x) = mx$$

für  $m \in \mathbb{N}$  ein Isomorphismus ist.

**Aufgabe 6.** Betrachten Sie die Untergruppen von  $S_3$  aus Aufgabe 1. Bestimmen Sie die Links- und Rechtsnebenklassen dieser Untergruppen und bestimmen Sie die Normalteiler von  $S_3$ .