Universität Siegen
Lehrstuhl Theoretische Informatik
Markus Lohrey

Übungsblatt 11

Aufgabe 1. Sei $(G, \circ)$ eine Gruppe und U eine Untergruppe von G. Zeigen Sie, dass U genau dann ein Normalteiler ist, wenn für alle $a \in G$ die Gleichung $a \circ U = U \circ a$ gilt, also wenn Links- und Rechtsnebenklassen von U übereinstimmen.

Aufgabe 2. Zeigen Sie, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ die Gruppe $(\mathbb{Z}, +)/n\mathbb{Z}$ isomorph ist zu $(\mathbb{Z}_n, +_n)$.

Aufgabe 3. Beweisen Sie, dass für jeden Homomorphismus zwischen 2 endlichen Gruppen $\varphi : G_1 \to G_2$ gilt: $|G_1| = |\ker(\varphi)| \cdot |\mathrm{im}(\varphi)|$.

Aufgabe 4. Gegeben sei die Gruppe $G = (\mathbb{Z}, +)$, deren Untergruppe $U = 4\mathbb{Z}$ und die Abbildung $\varphi : G/U \to (\mathbb{Z}_2, +_2)$ mit $\varphi(a + 4\mathbb{Z}) = a \mod 2$ für $a \in \mathbb{Z}$. Zeigen Sie, dass φ...

1. ... eine Funktion ist.
2. ... ein Homomorphismus ist.
3. ... kein Isomorphismus ist.

Aufgabe 5. Zeigen Sie, dass jede Untergruppe einer unendlichen zyklischen Gruppe selbst zyklisch ist.

Aufgabe 6. Es seien K,L zwei Untergruppen einer endlichen Gruppe $(G, \circ)$. Beweisen oder widerlegen Sie:

1. $|K| \cdot |L| = |K \cap L| \cdot |KL|$.
2. KL ist genau dann eine Untergruppe von G, falls $KL = LK$.