

Übungsblatt 12

Aufgabe 1. Berechnen Sie mit Hilfe des euklidischen Algorithmus den größten gemeinsamen Teiler der Zahlen m und n ($ggT(m, n)$) und geben Sie den $ggT(m, n)$ als Linearkombination von m und n an ($ggT(m, n) = x \cdot m + y \cdot n$ mit $x, y \in \mathbb{Z}$):

- (a) $m = 18, n = 30$
- (b) $m = 34, n = 55$
- (c) $m = 810, n = 2008$

Aufgabe 2. Geben Sie die Primfaktorzerlegung der folgenden Zahlen an:

- (a) 1024
- (b) 3072
- (c) 15360
- (d) 30030

Aufgabe 3. Beweisen Sie, dass für ganze Zahlen a und b gilt:

$$a \cdot b = ggT(a, b) \cdot kgV(a, b)$$

Anmerkung: $kgV(a, b)$ ist das kleinste gemeinsame Vielfache der Zahlen a und b

Aufgabe 4. Geben Sie die Multiplikationstabelle der Gruppe $(\mathbb{Z}_9^*, \cdot_n)$ an (bzw. berechnen Sie das Produkt aller Paare von Zahlen aus \mathbb{Z}_9^*)! Geben Sie außerdem zu jedem Element, das inverse Element an.

Aufgabe 5. Finden Sie eine Formel zur Berechnung der Euler'schen Funktion für p^k ($\varphi(p^k) = ?$) für eine Primzahl p und eine natürliche Zahl k .

Anmerkung: Überlegen Sie sich, wie viele Zahlen zwischen 0 und p^k nicht teilerfremd zu p^k sind.

Aufgabe 6. Berechnen Sie die folgenden Werte der Euler'schen Funktion:

(a) $\varphi(9)$

(b) $\varphi(35)$

(c) $\varphi(143)$

(d) $\varphi(1024)$