Universität Siegen
Lehrstuhl Theoretische Informatik
Markus Lohrey

Übungsblatt 1

Aufgabe 1. Gegeben seien beliebige Mengen A, B. Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

a) $A \cup (A \cap B) = A$

b) $A \cap (A \cup B) = A$

Aufgabe 2. Sind die folgenden Aussagen im logischen Sinne wahr oder falsch?

1. Eine unüberdachte Straße ist genau dann nass, wenn es geregnet hat.
2. Wenn n eine Primzahl ist, dann ist n ungerade.
3. Wenn eine Wand gelb ist, dann ist sie gelb oder grün.
4. Wenn die Erde eine Scheibe ist, dann ist $1 = 1$.
5. Wenn $3 = 4$ ist, dann ist $10 = 20$.
6. Jede natürliche Zahl ist größer als 10 oder kleiner als 100.
7. Es ist $0 = 0$ oder $1 = 1$.

Aufgabe 3. Berechnen sie den Wert $\mathcal{B}(F)$ für die gegebenen Formeln F und Belegungen $\mathcal{B}$.

a) $F = \neg(A \wedge (B \vee C)) \wedge (B \vee \neg C)$ und $\mathcal{B} : A \mapsto 1, B \mapsto 0, C \mapsto 0$

b) $F = (\neg B \wedge \neg C) \leftrightarrow ((A \rightarrow \neg B) \rightarrow C)$ und $\mathcal{B} : A \mapsto 1, B \mapsto 0, C \mapsto 1$

c) $F = (A \vee (B \leftrightarrow \neg C)) \rightarrow \neg(A \vee B)$ und $\mathcal{B} : A \mapsto 0, B \mapsto 1, C \mapsto 1$

Aufgabe 4. Ein Gerät besitzt vier Lämpchen $L_1, \ldots, L_4$, die entweder grün oder rot leuchten können. Das Gerät arbeitet korrekt, wenn die folgenden Eigenschaften erfüllt sind:

1. L_1 leuchtet grün.
2. Wenn L_1 oder L_2 grün leuchtet, dann leuchtet auch L_4 grün.
3. Mindestens eine der Lämpchen leuchtet rot.
4. L_3 leuchtet rot, wenn L_1 und L_2 in verschiedenen Farben leuchten.

Formalisieren Sie die Spezifikation des Gerätes durch eine aussagenlogische Formel. Geben Sie die gesamte Wahrheitstafel für Ihre Formel an. Ist die Formel erfüllbar?

Aufgabe 5. Beweisen Sie die folgenden Aussagen durch vollständige/strukturelle Induktion.

a) $\sum_{k=1}^{n}(3k^2 - k) = n^2(n+1) \quad$ für alle $n \in \mathbb{N}$

b) Ein *Binärbaum* ist ein Baum, in dem jeder Knoten entweder ein Blatt ist oder genau zwei Kindknoten hat. Zeigen Sie, dass jeder Binärbaum eine ungerade Anzahl von Knoten hat.

c) Sei A eine Menge mit n Elementen. Dann hat die Potenzmenge $2^A = \{B \mid B \subseteq A\}$ genau 2^n Elemente.