Universität Siegen
Lehrstuhl Theoretische Informatik
Markus Lohrey

Übungsblatt 6

Aufgabe 1. Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen.

a) Sei M eine Formelmenge. Dann ist M genau dann erfüllbar, wenn jede Formel $F \in M$ erfüllbar ist.

b) Sei M eine Formelmenge. Ist M unerfüllbar, so ist jede endliche Teilmenge von M unerfüllbar.

c) Sei M eine unendliche Formelmenge. Ist M unerfüllbar, so existiert eine Formel $F \in M$, so dass auch $M \setminus \{F\}$ unerfüllbar ist.

Aufgabe 2. Sei $\mathcal{B}$ eine Belegung und A eine atomare Formel. Dann ist

$$\mathcal{B}_A(X) = \begin{cases} \mathcal{B}(X) & \text{falls } X \neq A \\ 1 - \mathcal{B}(X) & \text{falls } X = A. \end{cases}$$

Eine Formel F heißt *unabhängig* von einer atomaren Formel A, wenn für jedes Modell $\mathcal{B}$ von F auch $\mathcal{B}_A$ ein Modell von F ist.

a) Zeigen Sie, dass F genau dann unabhängig von A ist, wenn eine zu F äquivalente Formel G existiert, die A nicht enthält.

b) Zeigen Sie, dass F genau dann unabhängig von allen atomaren Formeln ist, wenn F gültig oder unerfüllbar ist.

Aufgabe 3. Ein Graph $G = (V, E)$ heißt *k-färbbar*, wenn eine Funktion $f : V \to \{1, \ldots, k\}$ existiert, so dass $f(u) \neq f(v)$ für alle $(u, v) \in E$. Zeigen Sie, dass ein abzählbar unendlicher Graph genau dann k-färbbar ist, wenn jeder endliche Teilgraph k-färbbar ist.
Hinweis: Verwenden Sie atomare Formeln $A_{v,i}$ mit der Bedeutung, dass Knoten v Farbe i erhält. Formalisieren Sie die k-Färbbarkeit des Graphen durch eine Menge von Formeln und zeigen Sie mit dem Endlichkeitssatz, dass diese Formelmenge erfüllbar ist.