

Übungsblatt 13

Aufgabe 1. Gegeben seien ein zweistelliges Funktionssymbol f und ein einstelliges Prädikatensymbol R . Betrachten Sie die folgenden drei Strukturen:

- $\mathcal{A}_1 = (\{0, 1\}, I_{\mathcal{A}_1})$, wobei $f^{\mathcal{A}_1}(x, y) = x \vee y$, $R^{\mathcal{A}_1} = \emptyset$
- $\mathcal{A}_2 = (\mathbb{N}, I_{\mathcal{A}_2})$, wobei $f^{\mathcal{A}_2}(x, y) = x \cdot y$, $R^{\mathcal{A}_2} = \{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ ist eine Primzahl}\}$
- $\mathcal{A}_3 = (\mathbb{R}, I_{\mathcal{A}_3})$, wobei $f^{\mathcal{A}_3}(x, y) = x - 2y$, $R^{\mathcal{A}_3} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 0\}$

In welchen Strukturen gelten die folgenden Aussagen?

- (a) $\forall x(R(x) \vee R(f(x, x)))$
- (b) $\forall x \exists y R(f(x, y))$
- (c) $\forall x \neg R(f(x, x))$
- (d) $\forall x \forall y (f(x, y) = f(y, x))$
- (e) $\forall x \forall y (f(x, y) = x \vee f(x, y) = y)$
- (f) $\exists x (\neg R(x) \wedge f(x, x) = x)$

Aufgabe 2. Beweisen Sie, dass die folgenden Formeln erfüllbar aber nicht gültig sind.

- (a) $\exists x \forall y (f(f(y)) = x)$
- (b) $\forall x R(g(x)) \wedge \exists x \neg R(x)$
- (c) $\exists x \exists y (P(x, y) \wedge \neg P(y, x))$
- (d) $(y = z) \wedge \exists x (P(x) \rightarrow \neg P(g(x)))$
- (e) $P(a) \wedge \forall x (P(x) \rightarrow \neg P(g(x)))$
- (f) $\exists x \forall y (f(x, f(x, y)) = f(x, y))$
- (g) $\forall x \forall y (R(x, y) \leftrightarrow f(x) = y)$

- (h) $\forall x \exists y (f(x, y) = x \wedge f(x, x) \neq x)$
- (i) $\forall x (f(g(f(x))) \neq g(f(g(x))))$
- (j) $R(x) \wedge Q(y) \wedge \forall x (\neg R(x) \vee \neg Q(x))$

Aufgabe 3. Gegeben ist die folgende Formel

$$F = \exists x P(x) \wedge \forall y \neg (P(y) \wedge \forall z \neg R(z)) \wedge \neg \exists x R(x).$$

- (a) Überführen Sie F in eine erfüllbarkeitsäquivalente Formel G in Skolemform.
- (b) Geben Sie das Herbrand-Universum über der Menge aller Funktionssymbole in G an.
- (c) Zeigen Sie mit Hilfe der Grundresolution, dass G unerfüllbar ist. Es genügt die Klauseln der Herbrand-Expansion zu notieren, die Sie in der Grundresolution benutzen.