Universität Siegen
Lehrstuhl Theoretische Informatik
Markus Lohrey

Model Checking
WS 2015/16

Übungsblatt 13

Aufgabe 1. Zeigen Sie, dass jedes k-dimensionale VASS durch ein $(k+2)$-dimensionales VAS simuliert werden kann.

Hinweis: Übung 10, Aufgabe 2.

Aufgabe 2. Sei $\mathbb{N}[x_1, \ldots, x_k]$ der Polynomring über den Variablen $x_1, \ldots, x_k$ mit Koeffizienten aus $\mathbb{N}$. Für $p \in \mathbb{N}[x_1, \ldots, x_k]$ und $u = (u_1, \ldots, u_k) \in \mathbb{N}^k$ sei $p(u) \in \mathbb{N}$ die Auswertung von p unter der Belegung $x_i = u_i$ für $1 \leq i \leq k$.

Ein *polynomielles Vektoradditionssystem* S der Dimension k ist eine endliche Menge S von Tupeln $(\ell, p_1, \ldots, p_k)$, wobei $\ell \in \mathbb{N}^k$ und $p_1, \ldots, p_k \in \mathbb{N}[x_1, \ldots, x_k]$. Wir definieren $T(S) = (\mathbb{N}^k, \Rightarrow_S, \leq)$, wobei $u \Rightarrow_S v$ gilt, wenn

$$\exists (\ell, p_1, \ldots, p_k) \in S : u \geq \ell \text{ und } v = (p_1(u-\ell), \ldots, p_k(u-\ell)).$$

(a) Gegeben ist das folgende System:

$$S = \{\big((2,1), x_1x_2, x_1^2+1\big), \big((1,2), x_1^2x_2^2+2, x_1+x_2+1\big)\}$$

Berechnen Sie den Erreichbarkeitsbaum $\mathrm{RT}(v)$ für $v = (3,2)$.

(b) Zeigen Sie, dass Termination für polynomielle Vektoradditionssysteme entscheidbar ist.

Aufgabe 3. Sei $T = (V, E)$ ein endlich-verzweigender gerichteter Graph.

(a) Für $v \in V$ sei $t(v) \in \mathbb{N} \cup \{\omega\}$ die maximale Länge eines in v beginnenden Pfades. Warum ist $t(v)$ wohldefiniert?

(b) Zeigen Sie, dass $(V, E, \leq_T)$ ein WTG mit strikt starker Kompatibilität ist, wobei $\leq_T$ durch $u \leq_T v \iff t(u) \leq t(v)$ definiert ist.

(c) Sei $\preceq$ eine WQO auf V, so dass $(V, E, \preceq)$ ein WTG mit transitiver Kompatibilität ist. Zeigen Sie, dass dann $\preceq \,\subseteq\, \leq_T$ gilt.

(d) Sei nun die Abbildung $v \mapsto \mathrm{suc}_T(v)$ berechenbar. Zeigen Sie, dass die WQO $\leq_T$ genau dann entscheidbar ist, wenn das Terminationsproblem für T entscheidbar ist.